2009 개정 교육과정
인천광역시교육감 인정
고교-04-132-04-13

고등학교

미적분 I

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

교과서 물려주기 기록표

연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

※ 상태 표기 예시: 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨

고|등|학|교

미적분 I

(주)지학사

들어가는 말

수학은 오랜 옛날부터 문명의 발달에 핵심적인 역할을 해왔으며 앞으로도 이와 같은 수학의 역할은 더욱 확대될 것이다. 특히 현재의 지식 정보화 사회에서의 신기술은 수학의 뒷받침 없이는 얻어질 수 없다. 실제로 수학은 우주, 항공, 컴퓨터 과학과 같은 자연 과학은 물론이고 경제, 경영 등과 같은 인문 · 사회 과학에도 폭넓게 이용되고 있다. 또한 현대 문명을 합리적으로 운영하고 발전시켜 21세기를 살아가는 우리에게 창조적이고 논리적인 아이디어를 제공하는 기초가 되고 있다.

수학을 공부하는 목적은 단순히 수학의 기본 지식을 습득하는 데에서 벗어나 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석함으로써 실생활의 여러 가지 문제에 적극적으로 대처하고 합리적이고 논리적으로 해결하는 능력을 기르는 데 있다.

이런 목적을 달성하기 위하여 이 책은 전인적 성장의 기반 위에 개성의 발달과 진로를 개척하는 사람, 기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 사람, 문화적 소양과 다원적 가치에 대한 이해를 바탕으로 품격 있는 삶을 영위하는 사람, 세계와 소통하는 시민으로서 배려와 나눔의 정신으로 공동체 발전에 참여하는 사람을 육성하려는 마음가짐으로 새롭게 개정된 교육과정에 맞게 만들었다.

특히 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 학생의 추론 능력, 문제 해결 능력 그리고 의사소통 능력을 발달시킬 수 있도록 하였다.

둘째, 생각 열기를 통하여 자신을 둘러싼 세계에 대한 경험을 토대로 다양한 문화와 가치에 대한 이해를 넓히고, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 함으로써 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해할 수 있도록 하였다.

셋째, 심신의 건강하고 조화로운 발달을 추구하며, 다양한 분야의 경험과 지식을 익혀 적극적으로 진로를 탐색할 수 있도록 하였으며, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

본래 수학은 암기만으로는 좋은 학습 성과를 거둘 수 없고, 학생 스스로가 문제를 해결하고자 노력할 때 비로소 원리나 법칙 등이 심도 있게 이해되고 학습에 흥미도 느끼게 되는 과목이다. 이 책이 스스로 문제를 해결하려는 학생들에게 좋은 길잡이가 되기를 기대한다. 또 이 책으로 수학 실력을 키워 오늘날의 정보화와 세계화 시대에 걸맞은 창조적이고 지혜로운 사람으로 성장하기 바란다.

지은이 씀

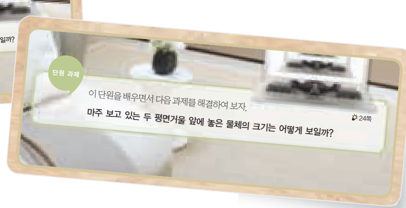
이 책의 짜임새

대 단 원　도 입

단원과 관련된 사진을 제시하고 관련 내용을 소개함으로써 단원 학습의 흥미와 관심을 높였다. 또 앞서 배운 내용과 단원의 연계성 확인을 위한 문제를 제시하였다.

중 단 원　도 입

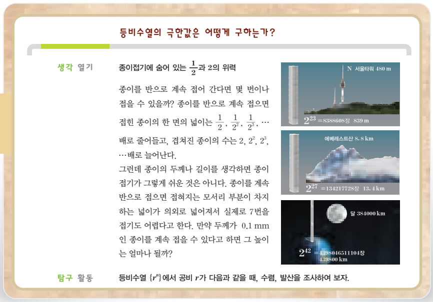
새로운 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

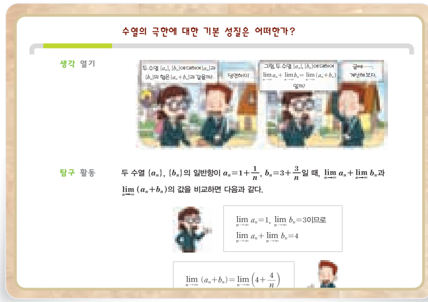


본문 전개

생각 열기 / 탐구 활동

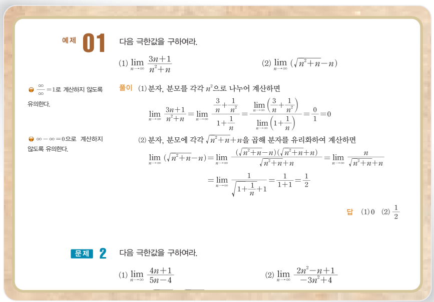
본격적인 학습에 앞서 스토리텔링으로 흥미를 이끌어 내고, 새로 도입할 수학 원리의 탐구를 통해 학습 내용의 실마리를 제공하였다.

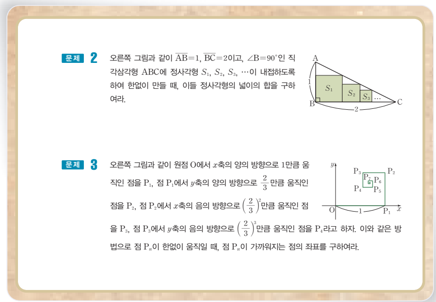




예제 / 문제

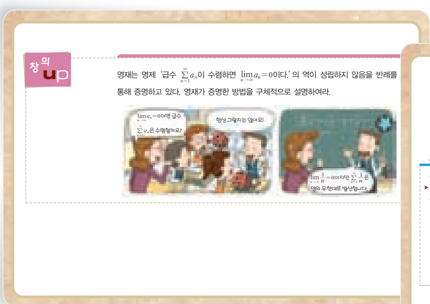
대표적인 유형의 문제로 개념 이해를 탄탄히 하고, 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

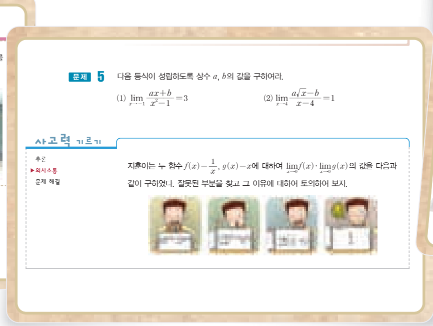


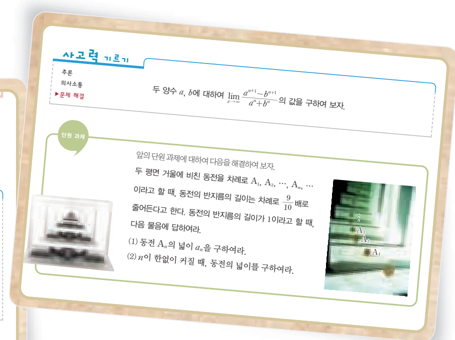


창의 UP / 사고력 기르기 / 단원 과제

수학의 개념을 깊이 생각하고 표현함으로써 창의력을 높이며, 추론, 의사소통, 문제 해결의 세 유형으로 사고력을 기르고, 중단원 도입과 관련한 구체적인 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.







중단원 마무리

학생의 학습 수준에 맞추어 문제를 선택하여 풀게 함으로써 수준별 학습이 가능하도록 하였고, 문제와 관련된 소단원명과 학습 요소를 제시하여 본문과의 연계성을 살리고 학생 스스로 부족한 부분을 찾아 보충할 수 있도록 하였다.

중단원 기초 [해답 p.191] 수준별 학습

1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$ (2) $-1, 2, 5, 8, \cdots$

(3) $1, -2, 4, -8, \cdots$ (4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$

2 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-5)$ (2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}4a_nb_n$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{4b_n}$

중단원 기본 수준별 학습

1 다음 수열 중에서 수렴하는 것을 모두 찾아라.

㉠ $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$ ㉡ $\{(-1)^{n-1}n\}$

㉢ $\{(-1)^n+(-1)^{n-1}\}$ ㉣ $\{2+(-1)^n\}$

01 수열의 수렴과 발산

2 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} na_n=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n^2a_n}$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산 수열의 극한에 대한 기본 성질

중단원 실력 [해답 p.191] 수준별 학습

1 수열의 극한에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 임의의 수열 $\{a_n\}$은 n이 한없이 커지면 수렴하거나 발산한다.

ㄴ. 진동하는 수열 중에서 수렴하는 수열도 존재한다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_{2n-1}\}, \{a_{2n}\}$도 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_{n+1}\}$은 수렴하지 않는다.

01 수열의 수렴과 발산

2 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+6n+3}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} 50a_n$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산

대단원 마무리

대단원 학습을 마친 후 다양한 주제에 대한 탐구로 종합적인 문제 해결력을 신장하도록 하였고, 단원에서 배운 내용을 요약·정리하여 학습 내용을 상기할 수 있도록 하였으며, 대단원 학습 내용을 총망라한 다양한 평가 문제를 제시하였다.

수행 과제

칸토어 집합

독일의 수학자 칸토어(Cantor, G. : 1845~1918)는 급수에 대한 연구에 몰두하다가 집합에 대한 개념이 필요하다는 것을 깨닫고, 오랜 연구 끝에 집합론을 창시하게 되었다. 특히 그는 무한집합에 깊이 있는 연구를 진행하였는데, 다음은 그가 생각해 낸 집합을 구성하는 방법이다.

❶ 길이가 1인 선분을 그린다.

❷ [1단계] 길이가 1인 선분을 삼등분하여 가운데 부분을 버린다.

❸ [2단계] 남은 두 선분을 각각 삼등분하여 가운데 부분을 버린다.

대단원 학습 내용 정리

❶ 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\alpha$

❷ 수열의 극한에 관한 기본 성질

수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)

(4) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

❹ 급수의 수렴과 발산

급수

(1) 급수: 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 +로 연결한 식

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

(2) 부분합: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

(3) 급수의 합: 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 수렴

급수와 일반항

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

대/단/원 평가 문제 Ⅰ. 수열의 극한

선택형

1 다음 수열 중에서 수렴하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{2+(-1)^n\}$ ② $\left\{\frac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\right\}$ ③ $\left\{\frac{(-1)^n\cdot 2}{n}\right\}$ ④ $\left\{\frac{n}{\sqrt{2n}}\right\}$ ⑤ $\left\{\frac{500}{n}\right\}$

2 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1$을 만족시킬 때, 다음 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

㉠ $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ ㉡ $\lim_{n\to\infty}a_{4n}=1$ ㉢ $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=1$

5 $r<-1$일 때, 수열 $\left\{\frac{2+r^{2n+1}}{3+r^{2n}}\right\}$의 극한값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 0 ④ $-r$ ⑤ r

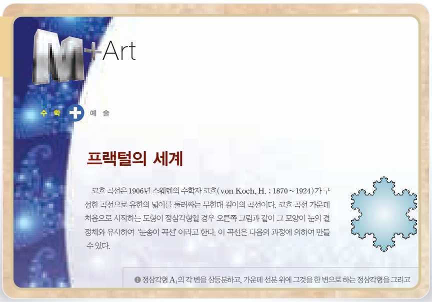
6 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n+3^n}{(2^n+1)(3^n+1)}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

7 다음 급수 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

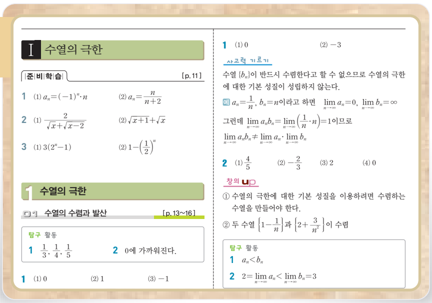
수학 플러스

교육부에서 발표한 수학 교육 선진화 방안에서 강조하는 STEAM과 관련하여 수학과 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.



부록

교과서의 문제에 대한 해답과 본문에 등장한 수학 용어와 기호를 찾아보기로 제공하여 학습에 도움이 되도록 하였다.



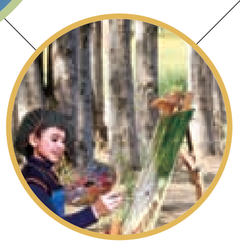
교과서 속 아이콘 활용

중③	선수 학습 내용	보기	구체적인 예시
	계산기 활용 문제	주의	주의할 점
실생활	실생활 문제	참고	참고할 사항
발전	발전 문제		

차례

I 수열과 극한

II 함수의 극한과 연속



III 다항함수의 미분법

IV 다항함수의 적분법

* 부록

전파망원경은 먼 우주로부터 오는 전파를 수신하고 있다.

I 수열의 극한

| 준 | 비 | 학 | 습 |

수학 Ⅱ 수열

1 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$ (2) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \cdots$

수학 Ⅱ 무리식

2 다음 무리식의 분자 또는 분모를 유리화하여라.

(1) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

수학 Ⅱ 등비수열의 합

3 다음 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots$ (2) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

1 수열의 극한

거울을 마주 보고 세우면 상이 무한히 맺힌다.

두 평면거울을 마주 보도록 세워 놓은 후 그 사이에 물체를 놓고 한쪽 거울을 바라보면 한쪽 거울에 맞은편 거울이 반사되어 여러 개의 물체가 줄지어 늘어선 모습을 볼 수 있다.

이것은 물체가 거울에 두 번 반사되어 다시 한쪽 거울에 보이는 상이 무한히 반복되기 때문이다.

이와 같은 현상은 우리의 일상생활에서도 쉽게 접할 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 24쪽

마주 보고 있는 두 평면거울 앞에 놓은 물체의 크기는 어떻게 보일까?

01 수열의 수렴과 발산

● 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

수열의 수렴과 발산은 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

크기가 1인 빵 한 덩이를 사람 수에 따라 똑같이 나누어 먹으려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표를 완성하여 보자.

빵을 나누어 먹는 사람 수(명)	1	2	3	4	5	…
한 사람이 먹는 빵 조각의 크기	1	$\frac{1}{2}$				…

2. **1**의 표를 이용하여 빵을 나누어 먹는 사람 수가 점점 많아지면 한 사람이 먹는 빵 조각의 크기는 어떻게 변할지 추측하여 보자.

수열 $\{a_n\}$이

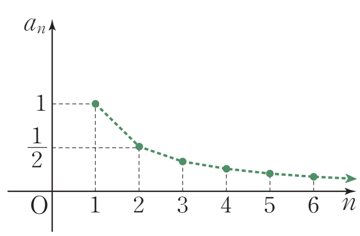
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

일 때,

$$a_{10}=\frac{1}{10},\ a_{100}=\frac{1}{100},\ a_{1000}=\frac{1}{1000},\ \cdots$$

과 같이 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 양수이면서 한없이 작아짐을 추측할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 그래프를 이용하면 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 가까워짐을 확인할 수 있다.



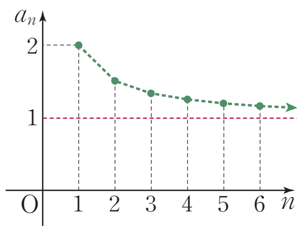
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떻게 변하는지 알아보자.

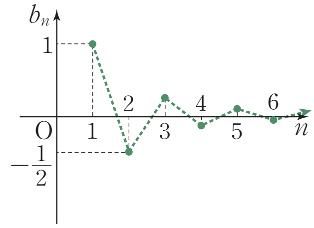
예를 들어 다음 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 생각하여 보자.

$$\{a_n\}:\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$$

$$\{b_n\}:\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$$

이 수열을 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.





위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $\frac{n+1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\alpha$$

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$이다.

여기서 $n\to\infty$에 있는 기호 **∞**를 **무한대**라고 읽는다.

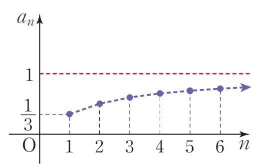
특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$ (c는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c=c$$

기호 lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이고, '리미트'라고 읽는다.

∞는 일정한 값을 나타내는 수가 아니고 한없이 커짐을 나타내는 기호이다.

보기 n이 한없이 커질 때, 수열 $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$의 일반항 $\frac{n}{n+2}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$이다.



문제 1 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{n^2},\ \cdots$

(2) $\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{17}{16},\ \cdots,\ 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots$

(3) $-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \cdots,\ -1,\ \cdots$

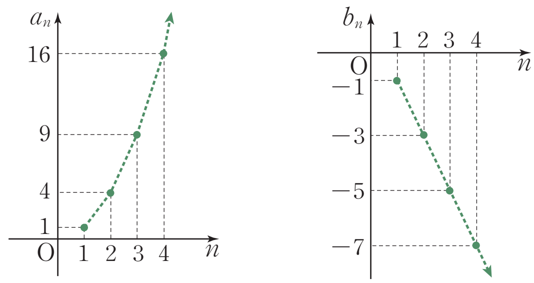
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수렴하지 않는 경우를 알아보자.

예를 들어 다음 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 생각하여 보자.

$\{a_n\}$: $1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$

$\{b_n\}$: $-1, -3, -5, -7, \cdots, 1-2n, \cdots$

이 수열을 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$의 일반항 n^2의 값은 한없이 커지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $1-2n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.

따라서 두 수열은 모두 수렴하지 않는다.

이와 같이 어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 **발산**한다고 한다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{또는} \quad n\to\infty \text{일 때 } a_n\to\infty$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$는 극한값이 ∞라는 뜻이 아니다. 이때에는 극한값이 없다고 한다.

또 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad \text{또는} \quad n\to\infty \text{일 때 } a_n\to-\infty$$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1-2n)=-\infty$이다.

보기 (1) 수열 $\{2^{n-1}\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 2^{n-1}의 값도 한없이 커지므로 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1}=\infty$이다.

(2) 수열 $\{-n^2\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 $-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2)=-\infty$이다.

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $50, 40, 30, 20, \cdots, 10(6-n), \cdots$

(2) $3, 8, 13, 18, \cdots, 5n-2, \cdots$

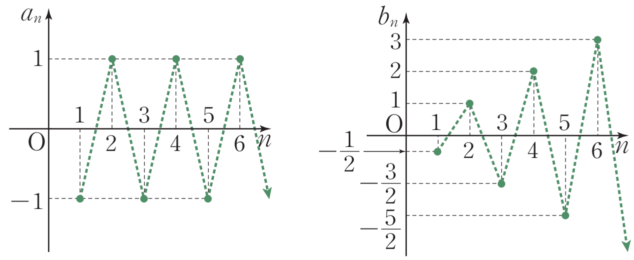
한편 수렴하지도 않고 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지도 않는 수열이 있다.

예를 들어 다음 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 생각하여 보자.

$$\{a_n\}:\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$

$$\{b_n\}:\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2},\ 2,\ \cdots,\ (-1)^n\cdot\frac{n}{2},\ \cdots$$

이 수열을 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않음을 알 수 있다.

이와 같은 수열은 진동한다고 하며, 진동하는 수열은 발산하는 수열이다.

수열의 수렴, 발산

(1) 수렴 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (단, α는 일정한 값)

(2) 발산 $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} \end{cases}$

보기 수열 $\{(-2)^n\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 $(-2)^n$의 절댓값은 한없이 커지고, 그 부호는 음과 양이 교대로 나타나므로 발산(진동)한다.

문제 3 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{(-1)^n+1\}$ (2) $\{2(-3)^n+1\}$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 수열 $\{a_n\}$이 0에 수렴할 때, 이 수열의 짝수 번째 항들을 나열하여 만든 수열 $\{a_{2n}\}$도 0에 수렴한다. 같은 방법으로 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$과 $\{a_{n+1}\}$도 수렴하는지 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여 보자.

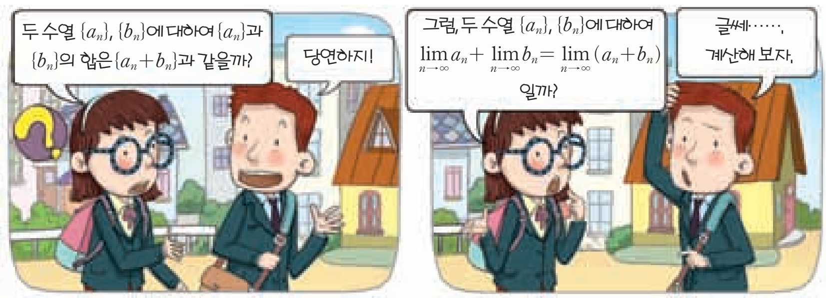
$$\{a_n\}:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots \xrightarrow[\text{항들을 나열한다.}]{\text{짝수 번째}} \{a_{2n}\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{2n},\ \cdots$$

02 극한값의 계산

● 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

수열의 극한에 대한 기본 성질은 어떠한가?

생각 열기



탐구 활동

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=1+\dfrac{1}{n}$, $b_n=3+\dfrac{3}{n}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n$과 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값을 비교하면 다음과 같다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$이므로
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n=4$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)$$
$$=4$$

위와 같은 방법으로 주어진 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여 다음의 값을 비교하여 보자.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$과 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} 3a_n$과 $3\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n$과 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$과 $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

● 문자와 문자, 문자와 수, 수와 수 사이의 '·'은 곱을 의미한다.
예 $(-a)\cdot(-a)$
$=(-a)\times(-a)$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항의 합, 차, 실수배, 곱, 몫을 항으로 하는 수열의 극한에 대하여 알아보자.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

일 때, 두 수열의 각 항의 합을 항으로 하는 수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴하며, 그 극한값은 두 수열의 극한값의 합과 같다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$$

이다.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

보기 (1) $\lim_{n\to\infty} 3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=3\left(\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)=3\cdot(1+0)=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\cdot0=0$

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{5}{n}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}-1}$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값을 다음과 같이 계산할 수 있는지 토의하여 보자.

> $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이므로
>
> $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=0\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

여러 가지 수열의 극한값을 구할 때, 복잡한 수열은 먼저 간단한 수열의 합, 차, 곱, 몫으로 고치고, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 그 극한값을 구할 수 있다.

특히 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$$

일 때, 수열 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 각각 나누어 계산한다.

또 일반항에 무리식이 포함된 수열의 극한값은 유리화하여 계산하면 편리하다.

예제 01

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n^2+n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

$\dfrac{\infty}{\infty}=1$로 계산하지 않도록 유의한다.

$\infty-\infty=0$으로 계산하지 않도록 유의한다.

풀이 (1) 분자, 분모를 각각 n^2으로 나누어 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

(2) 분자, 분모에 각각 $\sqrt{n^2+n}+n$을 곱해 분자를 유리화하여 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 (1) 0 (2) $\dfrac{1}{2}$

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{5n-4}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{-3n^2+4}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$

창의 up

다음 계산에서 ①의 이유를 설명하고, ②를 이용할 때 어떤 조건이 필요한지 말하여라.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2+3} \xrightarrow[\text{최고차항으로 나눈다.}]{\text{① 분모의}} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} \xrightarrow[\text{기본 성질을 이용한다.}]{\text{② 극한에 대한}} \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

수열의 극한값의 대소 관계는 어떠한가?

탐구 활동

일반항이 $a_n=2-\frac{1}{n}$, $b_n=3-\frac{1}{n}$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 모든 자연수 n에 대하여 a_n, b_n의 크기를 비교하여 보자.
2. 두 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$을 각각 구하고, 그 크기를 비교하여 보자.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한값의 대소 관계에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

수열의 극한값의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면, 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

참고 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n<b_n$이라고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 것은 아니다. 예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

예제 02 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{n+2}\le a_n\le\frac{1}{n+1}$$

풀이 각 변에 n을 곱하면 $\frac{n}{n+2}\le na_n\le\frac{n}{n+1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$이므로 $1\le\lim_{n\to\infty} na_n\le 1$

따라서 $\lim_{n\to\infty} na_n=1$

답 1

문제 3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $3n^2-2\le(n^2-2n)a_n\le 3n^2+2n-1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값

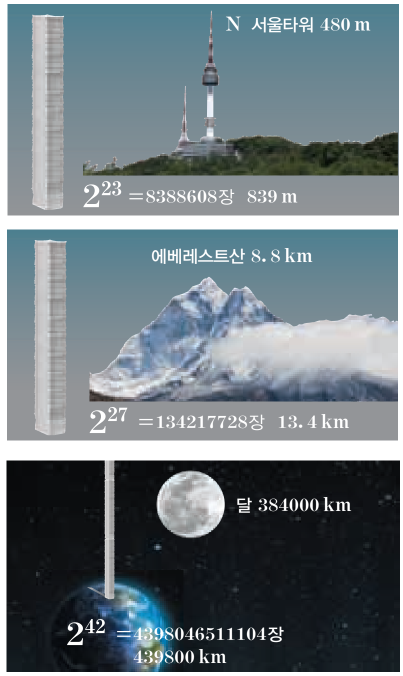
● 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

등비수열의 극한값은 어떻게 구하는가?

생각 열기 **종이접기에 숨어 있는 $\frac{1}{2}$과 2의 위력**

종이를 반으로 계속 접어 간다면 몇 번이나 접을 수 있을까? 종이를 반으로 계속 접으면 접힌 종이의 한 면의 넓이는 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\cdots$ 배로 줄어들고, 겹쳐진 종이의 수는 2, 2^2, 2^3, $\cdots$배로 늘어난다.

그런데 종이의 두께나 길이를 생각하면 종이 접기가 그렇게 쉬운 것은 아니다. 종이를 계속 반으로 접으면 접혀지는 모서리 부분이 차지하는 넓이가 의외로 넓어져서 실제로 7번을 접기도 어렵다고 한다. 만약 두께가 0.1 mm인 종이를 계속 접을 수 있다고 하면 그 높이는 얼마나 될까?



탐구 활동 **등비수열 $\{r^n\}$에서 공비 r가 다음과 같을 때, 수렴, 발산을 조사하여 보자.**

1. $r=\frac{1}{2}$

2. $r=2$

탐구 활동에서 $r=\frac{1}{2}$일 때, 등비수열 $\{r^n\}$은

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

이므로 0에 수렴한다. 또 $r=2$일 때, 등비수열 $\{r^n\}$은

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

이므로 무한대로 발산한다.

위와 같이 등비수열 $\{r^n\}$은 공비 r의 값에 따라 수렴과 발산이 정해짐을 알 수 있다.

이제 등비수열 $\{r^n\}$, 즉

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots,\ r^n,\ \cdots$$

의 수렴, 발산을 공비 r의 값에 따라 알아보자.

(i) $r>1$일 때

$r=1+h\ (h>0)$라고 하면 $r^n=(1+h)^n>1+nh\ \ (n\geq 2)$이고,

$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$$

수학 Ⅱ 수학적 귀납법을 이용하여 $(1+h)^n>1+nh\ \ (h>0,\ n\geq 2)$ 임을 보일 수 있다.

(ii) $r=1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

(iii) $-1<r<1$일 때

① $r=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 0=0$$

② $r\neq 0$이면 $\dfrac{1}{|r|}>1$이므로 (i)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{|r^n|}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{|r|}\right)^n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이다.

(iv) $r\leq -1$일 때

① $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

② $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 (i)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$이고 r^n의 부호가 교대로 변하므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\leq -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

등비수열 $\{r^n\}$은 $-1<r\leq 1$ 일 때, 수렴한다.

보기 (1) 등비수열 $\{r^n\}$이 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \cdots$일 때,

$r=-\frac{1}{3}$이고, $-1<r<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$이다.

(2) 등비수열 $\{r^n\}$이 $-3, 9, -27, \cdots, (-3)^n, \cdots$일 때,

$r=-3$이고, $r\leq-1$이므로 $\lim_{n\to\infty}(-3)^n$은 발산(진동)한다.

문제 1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{1.05^n\}$

(2) $\{(-0.8)^n\}$

(3) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

(4) $\left\{\left(-\frac{5}{4}\right)^n\right\}$

예제 01

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\frac{3^n-4^n}{5^n+2^n}\right\}$

(2) $\left\{\frac{5^n+2^n}{3^n-2^n}\right\}$

분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모와 분자를 나눈다.

풀이 (1) 분모와 분자의 모든 항을 5^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$=\frac{0-0}{1+0}=0$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 (1) 수렴, 0 (2) 발산

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\frac{3^n}{5^n+1}\right\}$

(2) $\left\{\frac{5^n+2^n}{3^n}\right\}$

(3) $\left\{\frac{5\cdot3^n+2^n}{3^n-2^n}\right\}$

(4) $\left\{\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+3^{n-1}}\right\}$

예제 02 $r>0$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

풀이 (i) $0<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $r=1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

답 $0<r<1$일 때 1에 수렴, $r=1$일 때 0에 수렴, $r>1$일 때 -1에 수렴

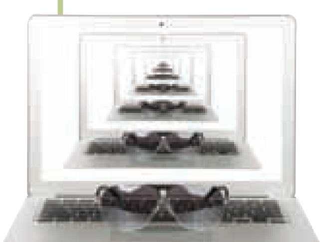
문제 3 수열 $\left\{\dfrac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 양수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}$의 값을 구하여 보자.

단원 과제

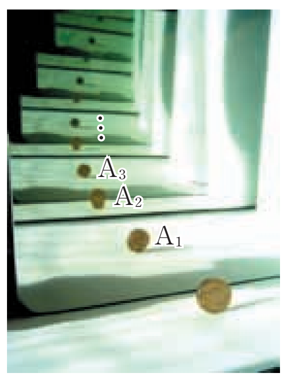


앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

두 평면 거울에 비친 동전을 차례로 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$이라고 할 때, 동전의 반지름의 길이는 차례로 $\dfrac{9}{10}$배로 줄어든다고 한다. 동전의 반지름의 길이가 1이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 동전 A_n의 넓이 a_n을 구하여라.

(2) n이 한없이 커질 때, 동전의 넓이를 구하여라.



중단원 기초

[해답 p.191]

수준별 학습

1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

01 수열의 수렴과 발산

(1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$

(2) $-1, 2, 5, 8, \cdots$

(3) $1, -2, 4, -8, \cdots$

(4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$

2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

02 극한값의 계산

수열의 극한에 대한 기본 성질

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-5)$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty} 4a_nb_n$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n}{4b_n}$

3 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

02 극한값의 계산

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$

4 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\frac{2n^2-n}{n^2+3}\le a_n\le\frac{2n^2}{n^2+2}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산

수열의 극한값의 대소 관계

5 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

03 등비수열의 극한값

(1) $\{(-1.32)^n\}$

(2) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

(3) $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$

(4) $\left\{\frac{5^n}{3^{2n}}\right\}$

[해답 p.191]

중단원 기본

수준별 학습

1 다음 수열 중에서 수렴하는 것을 모두 찾아라.

01 수열의 수렴과 발산

㉠ $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right\}$	㉡ $\{(-1)^{n-1}n\}$
㉢ $\{(-1)^n+(-1)^{n-1}\}$	㉣ $\{2+(-1)^n\}$

2 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} na_n=\dfrac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n^2a_n}$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산
수열의 극한에 대한 기본 성질

3 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn-4}{2n+3}=4$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산
미정계수의 결정

4 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+3^na_n}{3^{n+1}-5^na_n}=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값

5 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2x+3}{x^{2n}+1}$에 대하여 $f(-2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값
등비수열의 수렴 조건

[해답 p.191]

중단원 실력

수준별 학습

1 수열의 극한에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

01 수열의 수렴과 발산

ㄱ. 임의의 수열 $\{a_n\}$은 n이 한없이 커지면 수렴하거나 발산한다.
ㄴ. 진동하는 수열 중에서 수렴하는 수열도 존재한다.
ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$도 수렴한다.
ㄹ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_{n+1}\}$은 수렴하지 않는다.

2 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+6n+3}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} 50a_n$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산

3 다음의 수열 $\{a_n\}$에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$의 값이 존재하는 것을 모두 찾아라.

02 극한값의 계산
수열의 극한에 대한 기본 성질

㉠ $a_n=n$　　㉡ $a_n=\frac{1}{2^n}$　　㉢ $a_n=(-1)^n$

4 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3n+2^n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값

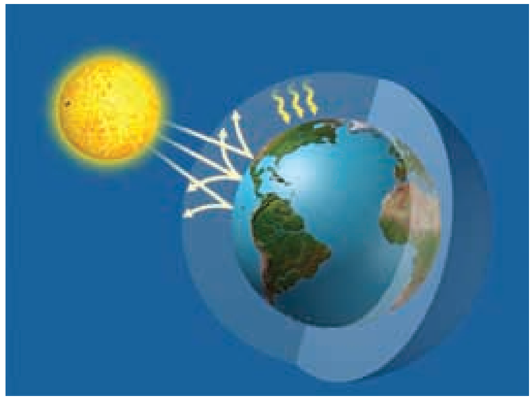
5 자연수 n에 대하여 10^n의 약수의 총합을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{10^n}$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값
특별한 언급이 없는 한 일반적으로 '약수'는 양의 약수를 의미한다.

2

급수

식물원의 유리 벽은 지구의 대기와 같다.



지구에 대기가 존재하지 않으면 태양에서 받는 빛에너지를 그대로 다시 방출하게 된다. 이러한 원리로 지구 표면의 온도를 계산하면 약 -26 ℃ 정도까지 떨어지게 된다. 그러나 지구에는 대기가 존재하여 평균 기온은 약 14 ℃ 정도를 유지하고 있다.

식물원의 천장과 벽은 보통 유리로 이루어져 있는데, 유리가 지구의 대기와 같은 역할을 함으로써 식물원 내부의 식물이 생장하기 좋은 온도를 유지시켜 준다. 최근에는 유리의 구조를 여러 가지 방법으로 개선하여 실내에 유입되는 빛의 양과 방출되는 빛의 양을 조절하여 보다 안정적인 온도를 유지할 수 있다고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 36쪽

유리를 통과하여 식물원의 내부로 들어오는 햇빛의 양을 구할 수 있을까?

01 급수의 수렴과 발산

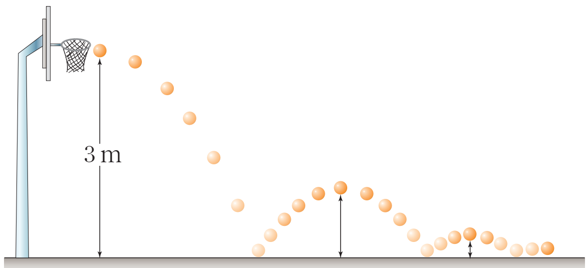
● 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

급수의 수렴과 발산은 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

다음 그림과 같이 땅에 떨어지면 떨어진 높이의 $\frac{1}{4}$배만큼 다시 튀어 오르는 농구공이 있다고 하자. 이 공이 지상 $3\,\mathrm{m}$ 높이의 골대에 맞고 땅에 떨어졌을 때, 물음에 답하여 보자.



1. 땅에 떨어진 후 n번째 튀어 오른 공의 높이를 a_n이라고 할 때, a_n의 값을 구하여 보자.

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$의 값을 구하여 보자.

3. **2**의 결과를 이용하여 공이 튀어 오른 높이의 총합을 구하는 방법을 말하여 보자.

위와 같이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

이라고 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

은 n이 한없이 커질 때 S_n의 극한으로 생각할 수 있다.

수열의 합의 수렴과 발산에 대하여 알아보자.

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 **급수**라 하고, 기호 $\sum$를 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

과 같이 나타낸다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 급수의 제n항까지의 **부분합**이라고 한다.

> $n=1, 2, 3, \cdots, n$일 때
> $S_1=a_1$
> $S_2=a_1+a_2$
> $\vdots$
> $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다.

이때 S를 이 **급수의 합**이라 하고, 기호로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

와 같이 나타낸다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 이 급수는 발산한다고 한다.

> 먼저 제n항까지의 부분합 S_n을 구하여 극한값 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구한다.

보기 (1) 급수 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2} \text{이므로} \quad \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty$$

따라서 이 급수는 양의 무한대로 발산한다.

(2) 급수 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \text{이므로} \quad \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2$$

따라서 이 급수는 2에 수렴한다.

문제 1 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $2+4+6+\cdots+2n+\cdots$

(2) $3+1+\frac{1}{3}+\cdots+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

예제 01 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

● $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

풀이 (1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

답 (1) 수렴, 1 (2) 발산

문제 2 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)$

발전 **문제 3** 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

● $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

$$\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}+\cdots+\log\frac{n+2}{n}+\cdots$$

이제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 수열의 극한값 사이의 관계에 대하여 알아보자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴할 때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$$

이다. 그런데 $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n&=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\\&=S-S=0\end{aligned}$$

이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

급수와 일반항

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(2)는 (1)의 대우이므로 참이다.

보기 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+3}$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

문제 4 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+1}$

창의 up

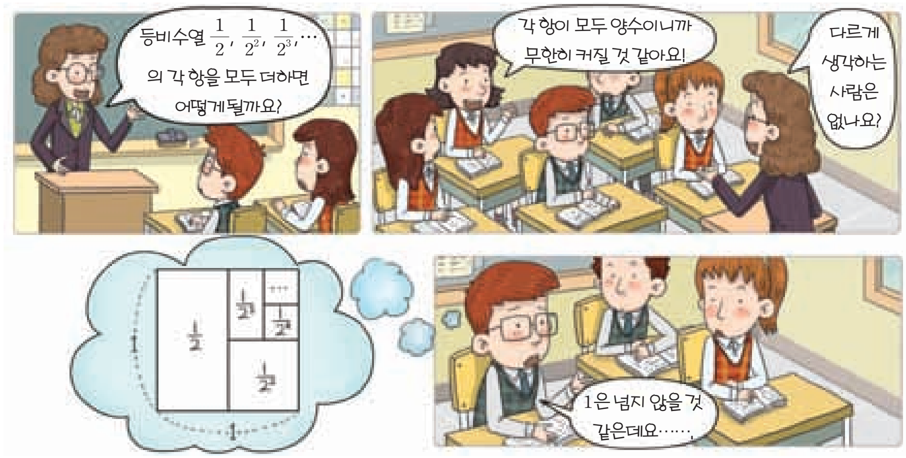
영재는 명제 '급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.'의 역이 성립하지 않음을 반례를 통해 증명하고 있다. 영재가 증명한 방법을 구체적으로 설명하여라.

02 등비급수

● 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

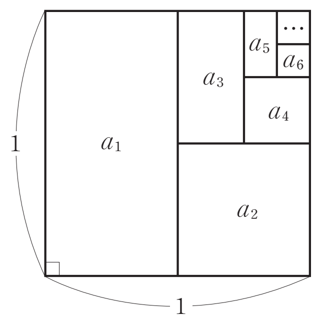
등비급수의 합은 어떻게 구하는가?

생각 열기



탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이가 $\frac{1}{2}$이 되도록 반으로 나누고, 나머지 직사각형을 넓이가 $\frac{1}{2}$이 되도록 반으로 나누는 과정을 반복할 때 만들어진 직사각형을 차례로 a_1, a_2, a_3, …이라고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 직사각형 a_1부터 a_n까지의 넓이의 합 S_n을 구하여 보자.
2. 직사각형의 넓이의 합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$의 극한값을 구하여 보자.
3. 2의 결과와 정사각형의 넓이를 비교하여 보자.

첫째항이 $a(a\neq0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 **등비급수**라고 한다. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산을 알아보려면 부분합으로 이루어진 수열

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

이 수렴하는지 발산하는지를 조사하면 된다.

부분합 $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$에서

$$r\neq1\text{이면}\quad S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$r=1\text{이면}\quad S_n=a+a+\cdots+a=na$$

이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 수렴, 발산은 다음과 같이 r의 값에 따라 결정된다.

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

(ii) $|r|\geq1$일 때, $\lim_{n\to\infty}ar^{n-1}\neq0$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$은 발산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\ (a\neq0)$은

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

예제 01 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하여라.

(1) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-\cdots$　　(2) $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+\cdots$

풀이 (1) 주어진 등비급수는 첫째항이 3이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이다.

이때 $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$이므로 이 등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=2$

(2) 주어진 등비급수는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{3}{2}$이다.

이때 $\left|\frac{3}{2}\right|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

답 (1) 수렴, 2　(2) 발산

문제 1 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$　　(2) $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{32}{81}+\cdots$

급수의 성질은 어떠한가?

탐구 활동 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값을 비교하면 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=7$$

$$a_n+b_n=\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

$$=\frac{\frac{7}{2}}{1-\frac{1}{2}}=7$$

위와 같은 방법으로 주어진 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음의 값을 비교하여 보자.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n$과 $3\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

수렴하는 급수의 합은 부분합으로 이루어진 수열의 극한이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면 다음과 같은 급수의 성질이 성립함을 알 수 있다.

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

보기 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=7$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=5$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3\cdot7-2\cdot5=11$

문제 2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=10$일 때, 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+3b_n)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$

예제 02

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$의 합을 구하여라.

풀이 $\frac{3^n+2^n}{6^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$이고

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$이 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

문제 3 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{5}{6^n}\right)$

사고력 기르기

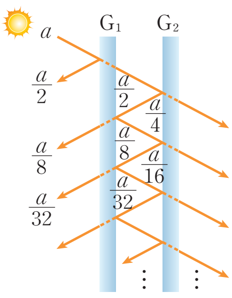
추론
의사소통
▶문제 해결

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 모두 수렴할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 수렴, 발산을 조사하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 식물원의 벽은 두 겹의 유리로 되어 있다고 한다. 이 벽의 두 유리 G_1, G_2는 모두 햇빛의 양의 $\frac{1}{2}$은 통과시키고, 나머지 $\frac{1}{2}$은 반사시킨다. 이 식물원의 유리 벽에 비치는 햇빛의 양을 a라고 할 때, 식물원의 내부로 들어오는 햇빛의 양은 얼마인지 구하여라.



03 등비급수의 활용

● 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

등비급수를 어떻게 활용하는가?

생각 열기

탐구 활동

순환소수 $0.\dot{9}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $0.\dot{9}$를 등비급수로 나타내어 보자.

2. **1**의 등비급수의 첫째항과 공비를 구하여 보자.

3. 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하여 $0.\dot{9}$의 값을 확인하여 보자.

탐구 활동에서와 같이 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하여 순환소수를 분수로 나타내어 보자.

예제 01 등비급수를 이용하여 순환소수 $0.2\dot{3}$을 분수로 나타내어라.

풀이

$$0.2\dot{3}=0.2+0.03+0.003+0.0003+\cdots$$
$$=0.2+\left(\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots\right)$$
$$=0.2+\frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$$

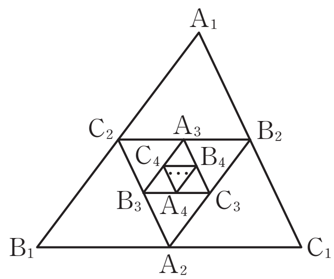
답 $\frac{7}{30}$

문제 1 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내어라.

(1) $0.\dot{3}\dot{6}$　　　　(2) $1.\dot{3}2\dot{1}$

예제 **02**

오른쪽 그림과 같이 둘레의 길이가 a인 삼각형 $A_1B_1C_1$의 각 변의 중점을 이어 삼각형 $A_2B_2C_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 삼각형 $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, …를 만들어 나갈 때, $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$, …의 둘레의 길이의 합을 구하여라.

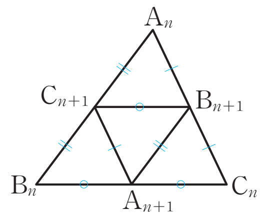


풀이 오른쪽 그림에서

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nB_n}$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}$,

$\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nC_n}$

이므로 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$과 삼각형 $A_nB_nC_n$은 닮음비가 $1:2$인 닮은 삼각형이다.



따라서 ($\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 둘레의 길이)$=\frac{1}{2}$($\triangle A_nB_nC_n$의 둘레의 길이)이므로

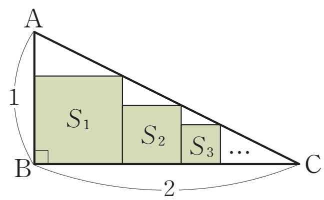
$\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$, …의 둘레의 길이의 합은

$$a+\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}\right)^2a+\cdots=\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=2a$$

답 $2a$

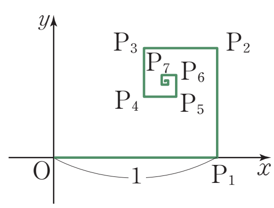
문제 **2**

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$이고, $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 정사각형 S_1, S_2, S_3, …이 내접하도록 하여 한없이 만들 때, 이들 정사각형의 넓이의 합을 구하여라.



문제 **3**

오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 1만큼 움직인 점을 P_1, 점 P_1에서 y축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 움직인 점을 P_2, 점 P_2에서 x축의 음의 방향으로 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$만큼 움직인 점을 P_3, 점 P_3에서 y축의 음의 방향으로 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$만큼 움직인 점을 P_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 점 P_n이 한없이 움직일 때, 점 P_n이 가까워지는 점의 좌표를 구하여라.



[해답 p.193]

1 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

01 급수의 수렴과 발산

(1) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+\cdots$

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

2 다음 급수가 발산함을 보여라.

01 급수의 수렴과 발산
급수와 일반항

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$

3 다음 등비급수의 합을 구하여라.

02 등비급수
등비급수의 수렴과 발산

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})^{n}$

4 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2$일 때, 다음 급수의 합을 구하여라.

02 등비급수
급수의 성질

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3}-\frac{b_n}{2}\right)$

5 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내어라.

03 등비급수의 활용

(1) $0.\dot{1}\dot{2}$

(2) $0.7\dot{1}$

(3) $1.\dot{3}\dot{5}$

[해답 p.193]

1 다음 급수 중에서 수렴하는 것을 모두 찾아라.

01 급수의 수렴과 발산

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$	㉡ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-1}$
㉢ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$	㉣ $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{n+2}{n+1}$

2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n+6}{5a_n+2n+5}$의 값을 구하여라.

01 급수의 수렴과 발산
급수와 일반항

3 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}3(1-x^2)^{n-1}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 위의 급수가 수렴하기 위한 실수 x값의 범위를 구하여라.

(2) (1)에서 구한 범위에서 주어진 급수의 합을 구하여라.

02 등비급수
등비급수의 수렴과 발산

4 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{6^{n-1}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n-1}}{6^{n+1}}$

02 등비급수
급수의 성질

5 연희의 태블릿 PC 건전지는 방전될 때까지 처음 사용 가능한 시간이 90시간이었고, 충전하여 사용할 때마다 사용 가능한 시간이 바로 전 사용 가능한 시간의 $\frac{1}{100}$배씩 줄어들었다. 연희의 태블릿 PC를 방전되어 충전하는 과정을 반복할 때, 사용 가능한 시간의 합을 구하여라.

03 등비급수의 활용

[해답 p. 193]

중단원 실력

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\left(\frac{a_1}{2}-3\right)+\left(\frac{a_2}{4}-3\right)+\left(\frac{a_3}{6}-3\right)+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n}{8n-a_n}$의 값을 구하여라.

01 급수의 수렴과 발산

2 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}=\frac{4}{3}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 3}$의 값을 구하여라.

02 등비급수

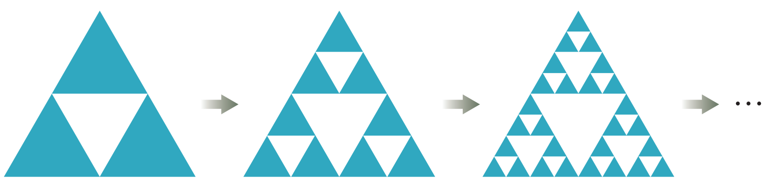
3 $\frac{304}{999}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n번째 자리 숫자를 a_n이라고 한다.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값을 구하여라.

02 등비급수

4 다음 그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 가운데 정삼각형을 제거한 후 남은 부분의 넓이를 a_1, 다시 남아 있는 정삼각형들의 각 변의 중점을 연결하여 각각 가운데 정삼각형을 제거한 후 남은 부분의 넓이를 a_2라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots$의 값을 구하여라.

03 등비급수의 활용

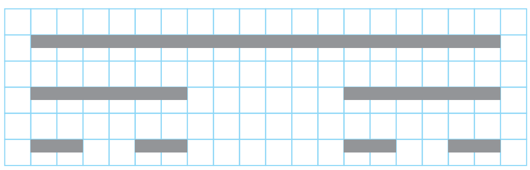


수행 과제

칸토어 집합

독일의 수학자 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)는 급수에 대한 연구에 몰두하다가 집합에 대한 개념이 필요하다는 것을 깨닫고, 오랜 연구 끝에 집합론을 창시하게 되었다. 특히 그는 무한집합에 깊이 있는 연구를 진행하였는데, 다음은 그가 생각해 낸 집합을 구성하는 방법이다.

❶ 길이가 1인 선분을 그린다.
❷ [1단계] 길이가 1인 선분을 삼등분하여 가운데 부분을 버린다.
❸ [2단계] 남은 두 선분을 각각 삼등분하여 가운데 부분을 버린다.



이와 같은 과정을 계속 반복하여 남게 되는 점들의 집합을 칸토어 집합(Cantor set)이라고 한다. 이 과정의 n단계에서 버려지는 선분의 개수를 a_n, 버려지는 선분 한 개의 길이를 l_n이라 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | **1** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{l_n\}$의 일반항을 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **2** 두 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} l_n$을 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **3** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n$을 구하고, 이로부터 알 수 있는 칸토어 집합의 특징을 말하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\alpha$$

2 수열의 극한에 관한 기본 성질

수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

수열의 극한값의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면, 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

(3) (1)에서 $a_n<b_n$이라고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 것은 아니다.

3 등비수열 $\{r^n\}$의 극한값

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

4 급수의 수렴과 발산

급수

(1) 급수: 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

(2) 부분합: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

(3) 급수의 합: 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 수렴하는 값

급수와 일반항

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

5 등비급수

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\,(a\neq0)$은

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r|\ge1$일 때, 발산한다.

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (단, c는 상수)

용어와 기호 수렴, 극한(값), 무한대, 발산, 급수, 부분합, 급수의 합, 등비급수, $\lim_{n\to\infty}a_n$, ∞, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 다음 수열 중에서 수렴하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{2+(-1)^n\}$ ② $\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\right\}$

③ $\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{n}\right\}$ ④ $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{2n}}\right\}$

⑤ $\left\{\dfrac{500}{n}\right\}$

2 수열 $\{a_n\}$이 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=1$을 만족시킬 때, 다음 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$	ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{4n}=1$
ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}=1$	

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3 이차방정식 $x^2-(2n^2-1)x+n^2=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{4}{3}$

5 $r<-1$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{2+r^{2n+1}}{3+r^{2n}}\right\}$의 극한값은?

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 0
④ $-r$ ⑤ r

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+3^n}{(2^n+1)(3^n+1)}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

7 다음 급수 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3n+2}$	ㄴ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{3^n}$
ㄷ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n(n+2)}$	ㄹ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

8 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=7$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=5$일 때,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

9 다음 급수 중에서 수렴하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\cdots$

② $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$

③ $1+(-1)+1+(-1)+1+\cdots$

④ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$

⑤ $2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$

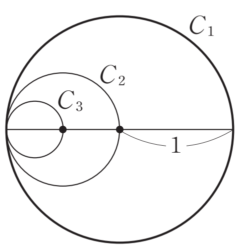
10 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 급수 중에서 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은?

① $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})$

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$

11 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C_1의 중심을 지나고 C_1에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2의 중심을 지나고 C_2에 내접하는 원을 C_3이라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 모든 원의 넓이의 합은?



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π

④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

서답형

12 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=3$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}(4n+3)a_n$의 값을 구하여라.

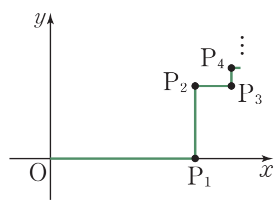
13 급수 $\log_4\sqrt{2}+\log_4\sqrt{\sqrt{2}}+\log_4\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}+\cdots$의 합을 구하여라.

|서|술|형|

14 등비수열 $\left\{(x-2)\left(\frac{2x+1}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

15 오른쪽 그림과 같이 점 P_n이 원점 O를 출발하여 x축 또는 y축과 평행하게 P_1, P_2, P_3, $\cdots$으로 움직인다.



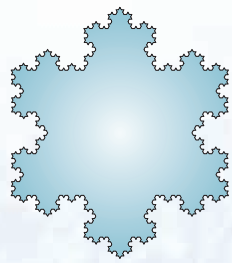
$\overline{OP_1}=3$, $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}$, $\overline{P_2P_3}=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$, $\cdots$일 때, 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+Art

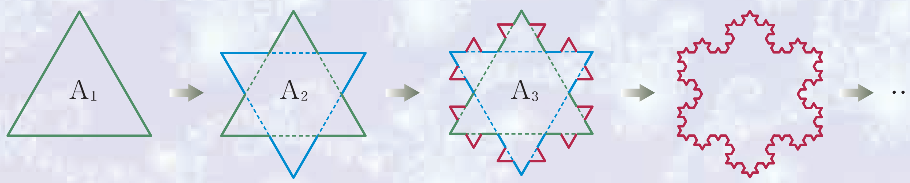
수 학 + 예 술

프랙털의 세계

코흐 곡선은 1906년 스웨덴의 수학자 코흐(von Koch, H. ; 1870~1924)가 구성한 곡선으로 유한의 넓이를 둘러싸는 무한대 길이의 곡선이다. 코흐 곡선 가운데 처음으로 시작하는 도형이 정삼각형일 경우 오른쪽 그림과 같이 그 모양이 눈의 결정체와 유사하여 '눈송이 곡선' 이라고 한다. 이 곡선은 다음의 과정에 의하여 만들 수 있다.



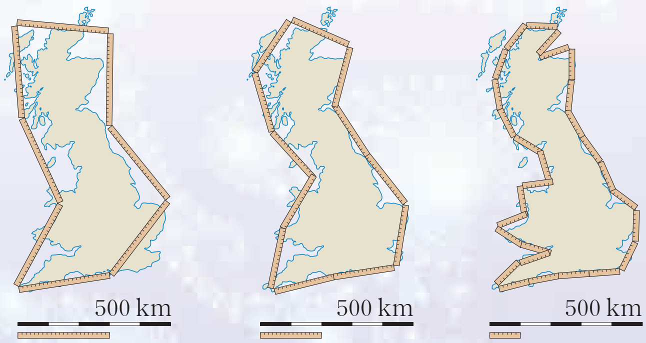
❶ 정삼각형 A_1의 각 변을 삼등분하고, 가운데 선분 위에 그것을 한 변으로 하는 정삼각형을 그리고 가운데 선분은 지워서 도형 A_2를 만든다.
❷ 도형 A_2의 각 변에 대하여 ❶의 과정을 반복하여 도형 A_3을 만든다.
❸ 이와 같은 과정을 무한히 반복하면 코흐 눈송이가 완성된다.



코흐 눈송이의 둘레의 길이는 일정한 값으로 수렴하지 않고 무한히 커지지만, 한 변의 길이가 1인 정삼각형으로 만든 코흐 눈송이의 넓이는 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하면 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$으로 수렴하는 것을 알 수 있다.

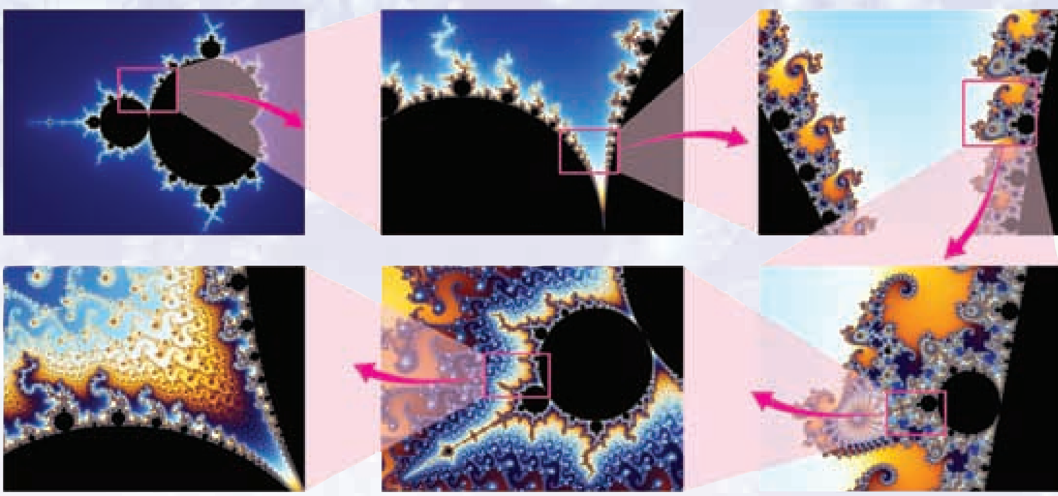
코흐의 눈송이 곡선과 같이 그 영역의 넓이는 유한하지만 그 둘레의 길이는 무한대인 도형을 프랙털(fractal)이라고 한다. 프랙털이라는 용어는 프랑스의 수학자 망델브로(Mandelbrot, B. ; 1924~2010)에 의해 고안되었다. '조각', '부분' 을 뜻하는 라틴어 'fractus' 에서 유래한 말로, 단순한 선이 아니면서 복잡하고 끊임없이 꺾인 것처럼 보이고, 무수히 쪼개진 면으로 이루어진 도형을 일컫는다.

망델브로는 1967년 영국의 과학 잡지 '사이언스'에 '영국을 둘러싸고 있는 해안선의 총 길이는 얼마인가?' 라는 논문을 통해 프랙털 이론을 설명하였다. 이 논문에서 그는 영국의 프랙털적인 해안선(리아스식 해안선)의 길이는 어떤 단위의 자로 재느냐에 따라 얼마든지 달라질 수 있다고 주장하였다.



프랙털은 일부분이 전체와 닮은 기하학적 구조를 지니고 있는데, 이러한 특징을 자기 유사성이라고 한다. 자연계에서도 프랙털이 자주 발견되는데, 구름, 산맥, 강줄기, 번개, 해안선, 고사리 잎, 나뭇가지, 인체 조직 등이 프랙털의 모습을 하고 있다. 오늘날 눈송이 곡선을 포함한 프랙털은 천문학, 경제학, 기상학, 그리고 영화 제작에도 활용되고 있다.

망델브로 집합으로 일컬어지는 프랙털의 일부분을 계속하여 확대하면 다음과 같이 전체의 모습이 반복적으로 나타난다.



회화에서는 원근감을 나타내기 위해 평행한 두 직선이
한없이 가까워져 한 점에서 만나는 것처럼 표현한다.

함수의 극한과 연속

| 준 | 비 | 학 | 습 |

미적분 Ⅰ 수열의 극한

1 다음 수열의 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}$

미적분 Ⅰ 수열의 극한의 성질

2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-b_n)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a_n}{a_n+2b_n}$

1 함수의 극한

태풍의 규모와 위력

태풍은 보통 반지름의 길이가 500 km정도로 한반도 전체를 덮고도 남을 만큼 크며, 그 중심에는 태풍의 눈이 있다. 태풍은 태풍의 눈을 중심으로 시계 반대 방향으로 회전하며 북상하기 때문에 태풍의 오른쪽 반원은 보다 강력한 위력을 가지고 있다.

태풍은 지구의 위도에 따라 태양으로부터 받는 열량의 차이로 인한 불균형을 해소하기 위하여 발생하는데, 저위도 지방의 따뜻한 공기가 바다로부터 수증기를 공급받으면서 강한 바람과 많은 비를 동반하여 매년 여름과 초가을에 걸쳐 우리나라에 상륙한다.

우리나라에 상륙한 태풍은 산사태, 하천 범람 등을 일으키고, 심지어 큰 인명 피해를 일으키기도 한다. 따라서 기상청은 태풍에 보다 안전하게 대비하기 위하여 태풍이 발생한 순간부터 태풍에 대한 정보 수집에 촉각을 곤두세운다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 62쪽

태풍이 사라질 때까지 태풍의 눈의 경로를 예측할 수 있을까?

01 함수의 극한의 뜻

● 함수의 극한의 뜻을 안다.

함수의 극한이란 무엇인가?

생각 열기

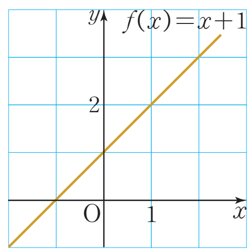
탐구 활동

함수 $f(x)=x+1$에서 x의 값이 1에 가까워질 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표를 완성하여 보자.

x	$\cdots$	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	1.001	1.01	1.1	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$				$\rightarrow$	2	$\leftarrow$				$\cdots$

2. 1의 표에서 x의 값이 1에 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 수에 가까워진다고 할 수 있는지 말하여 보자.
3. 오른쪽 좌표평면 위의 그래프를 이용하여 2의 결과를 확인하여 보자.

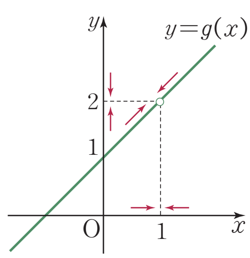


위의 함수 $f(x)=x+1$에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

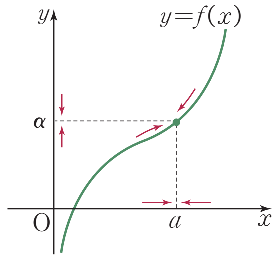
한편 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$일 때 분모가 0이 되어 그 함숫값이 정의되지 않는다. 그러나 $x\neq1$이면

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

이므로 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $g(x)$의 값은 오른쪽 그림과 같이 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다.

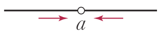


이때 α를 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

● $x \to a$는 $x \neq a$이면서 x가 a에 한없이 가까워짐을 뜻한다.



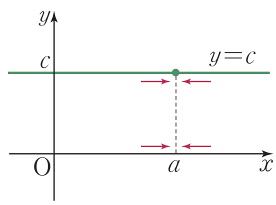
이를테면 앞의 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$와 $g(x)$의 값은 각각 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,\ \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

와 같이 나타낼 수 있다.

● 함숫값이 정의되지 않는 점에서도 극한값은 존재할 수 있다.

특히 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 경우에는 오른쪽 그림과 같이 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 항상 c이므로 a의 값에 관계없이 다음이 성립한다.



$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c$$

예제 01

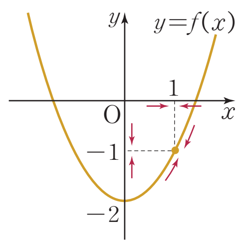
다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2-2)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$

풀이 (1) 함수 $f(x)=x^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2)=-1$$



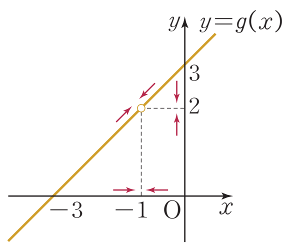
(2) $x\neq -1$일 때

$$g(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}=x+3$$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+3)=2$$



답 (1) -1　(2) 2

문제 **1** 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

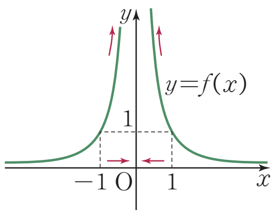
(1) $\lim_{x \to 2}(2x-1)$　　(2) $\lim_{x \to 1}(x^2+3x)$

(3) $\lim_{x \to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$　　(4) $\lim_{x \to 0}5$

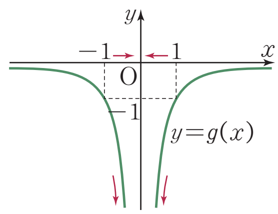
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$가 수렴하지 않는 경우에 대하여 알아보자.

〈그림 1〉과 같이 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다.

또 〈그림 2〉와 같이 함수 $g(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a}f(x)=\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

● ∞는 아주 큰 수가 아니라 무한히 커지는 상태를 나타낸다.

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a}f(x)=-\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

● $-\infty$는 아주 작은 값이 아니라 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 상태를 나타낸다.

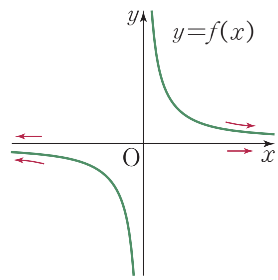
보기 (1) $\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$　　(2) $\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

문제 **2** 다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to 2}\frac{1}{|x-2|}$　　(2) $\lim_{x \to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$　　(3) $\lim_{x \to -1}\left\{2-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때의 함수의 극한을 생각하여 보자.

오른쪽 그림의 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커지면 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때에도 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.



일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 수렴한다는 것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to \infty \text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

또 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 수렴한다는 것을 기호로

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\beta \quad \text{또는} \quad x \to -\infty \text{일 때 } f(x) \to \beta$$

와 같이 나타낸다.

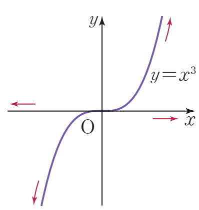
한편 x의 값이 한없이 커지거나, 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

와 같이 나타낸다.

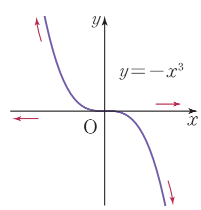
보기 (1)



$\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

(2)



$\lim_{x\to\infty} (-x^3)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (-x^3)=\infty$

문제 3 다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+3}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5}{x}-2\right)$

(3) $\lim_{x\to\infty} x^2$

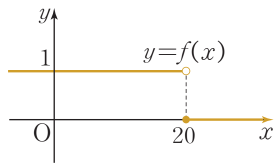
(4) $\lim_{x\to-\infty} (3x-2)$

함수의 좌극한과 우극한이란 무엇인가?

탐구 활동

민호는 실내 온도가 20 ℃ 미만이면 보일러가 자동으로 켜지고, 20 ℃ 이상이면 보일러가 자동으로 꺼지도록 설정하였다. 실내 온도가 x ℃일 때, 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하고, 그 그래프를 나타내었다. 물음에 답하여 보자.

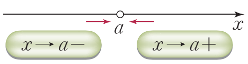
$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<20) \\ 0 & (x\geq 20) \end{cases}$$



1. x의 값이 19.9, 19.99, 19.999, …와 같이 20보다 작으면서 20에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.

2. x의 값이 20.1, 20.01, 20.001, …과 같이 20보다 크면서 20에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.

3. **1**, **2**의 결과를 비교하여 보자.



x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \longrightarrow a-$와 같이 나타내고, x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \longrightarrow a+$와 같이 나타낸다.

일반적으로 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **좌극한**이라 하고, 기호로

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow a- \text{일 때 } f(x) \longrightarrow \alpha$$

와 같이 나타낸다.

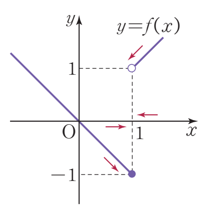
또 x의 값이 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **우극한**이라 하고, 기호로

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\beta \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow a+ \text{일 때 } f(x) \longrightarrow \beta$$

와 같이 나타낸다.

보기 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x\leq 1) \\ x & (x>1) \end{cases}$에 대하여

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$

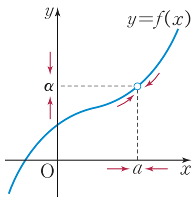


문제 4 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>1) \\ x+1 & (x\le 1) \end{cases}$$

일 때, 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1-} f(x)$　　(2) $\lim_{x\to 1+} f(x)$



함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이면 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 존재하고 그 값은 α로 일치한다. 또 $x=a$에서 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같으면 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 극한

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \Longleftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$이고 $\lim_{x\to a+} f(x)=\alpha$

예제 02 함수 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$에 대하여 극한 $\lim_{x\to 1} f(x)$를 그래프를 이용하여 조사하여라.

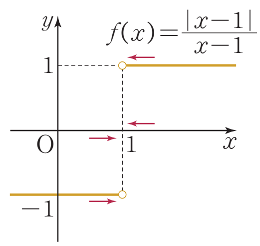
풀이 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$에서

$\lim_{x\to 1-} f(x)\neq \lim_{x\to 1+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은

존재하지 않는다.



답 존재하지 않는다.

문제 5 다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x-3}$　　(2) $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-1}{|x+1|}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 극한 $\lim_{x\to\infty} f(x)$와 $\lim_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$이 존재하고, 그 값이 같은 함수 $f(x)$를 찾아보자.

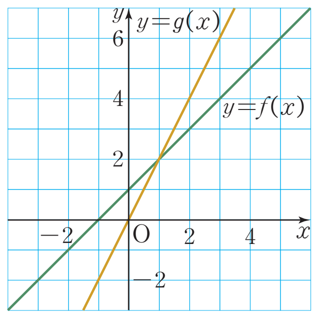
02 함수의 극한에 대한 성질

● 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

함수의 극한에 대한 성질은 어떠한가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $f(x)+g(x)$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.

2. $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)+g(x)\}$의 값을 그래프를 이용하여 구하여 보자.

3. $\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)$의 값을 그래프를 이용하여 구하여 보자.

4. **2**, **3**의 결과를 비교하여 보자.

탐구 활동에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to2}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to2}f(x)+\lim_{x\to2}g(x)$$

가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 함수의 극한에서는 다음과 같은 성질이 성립한다.

함수의 극한에 대한 성질

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

● 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때,
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\alpha$ (단, c는 상수)
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

참고 함수의 극한에 대한 성질은 $x\to a$를 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$로 바꾸어도 성립한다.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 복잡한 함수의 극한을 그래프를 이용하지 않고도 구할 수 있다.

보기 (1) $\lim_{x\to2}(3x^2+x)=\lim_{x\to2}3x^2+\lim_{x\to2}x=3\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}x$

$=3\lim_{x\to2}x\cdot\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}x=3\cdot2^2+2=14$

(2) $\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2+1}=\frac{\lim_{x\to-1}(x-2)}{\lim_{x\to-1}(x^2+1)}=\frac{\lim_{x\to-1}x-\lim_{x\to-1}2}{\lim_{x\to-1}x^2+\lim_{x\to-1}1}=\frac{-1-2}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}$

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to3}(x^2-4x+7)$

(2) $\lim_{x\to2}(x+1)(x^2-2)$

(3) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+3}{x+3}$

(4) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+1}\right)$

$x\to a$ 또는 $x\to\infty$일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)g(x)$, $f(x)-g(x)$의 극한값은 인수분해 또는 유리화를 이용하여 식을 변형하거나, 수열의 극한과 같은 방법으로 식을 변형하여 구한다.

예제 01 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴이 나오지 않도록 분자와 분모를 인수분해하여 약분한다.

(2) 근호가 있는 부분을 유리화한다.

풀이 (1) 분자를 인수분해하여 약분하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+2)=5$$

(2) 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

답 (1) 5 (2) $\frac{1}{4}$

문제 **2** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{x-2}$ (2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

예제 02

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+2}{x^2+3}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이 나오지 않도록 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 각각 나눈다.

(2) 근호가 있는 부분을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 (1) 분모와 분자의 각 항을 분모의 최고차항 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

(2) 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$

문제 **3** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{1+3x^2}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-3x+4}{2x^2-1}$ (4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

발전

문제 **4** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$ (2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq0)$의 극한에서 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 일 때, 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\cdot0=0$$

이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

예제 03

다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$$

● $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재할 때, (분모) → 0이면 (분자) → 0이다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$, $1+a+b=0$

$b=-a-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+a+1)=2+a$$

이므로 $2+a=5$

따라서 $a=3$, $b=-4$

답 $a=3$, $b=-4$

문제 5

다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to-1}\frac{ax+b}{x^2-1}=3$　　(2) $\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}-b}{x-4}=1$

사고력 기르기

추론

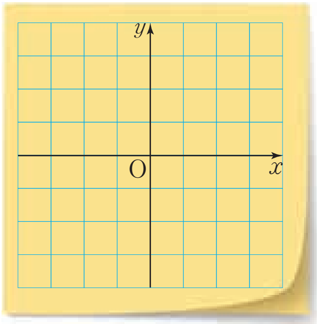
▶ 의사소통

문제 해결

지훈이는 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$에 대하여 $\lim_{x\to0}f(x)\cdot\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 다음과 같이 구하였다. 잘못된 부분을 찾고 그 이유에 대하여 토의하여 보자.

함수의 극한에서 대소 관계는 어떠한가?

탐구 활동 세 함수 $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$, $g(x)=1+\frac{x^2}{4}$, $h(x)=1+\frac{x^2}{8}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



$\lim_{x\to 2} f(x)$
$=\lim_{x\to 2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=\square$
$\lim_{x\to 2} g(x)$
$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)=\square$
$\lim_{x\to 2} h(x)$
$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)=\square$

1. 세 함수의 그래프를 그리고, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 값의 크기를 비교하여 보자.

2. $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 2} g(x)$, $\lim_{x\to 2} h(x)$의 값을 구하고, 그 크기를 비교하여 보자.

3. 함숫값의 크기와 극한값의 크기 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

함수의 극한에서는 다음과 같은 대소 관계가 성립한다.

● 함수의 극한의 대소 관계는 $x \to a$를 $x \to \infty$, $x \to -\infty$로 바꾸어도 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

참고 (1) $f(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x\to a} f(x)<\lim_{x\to a} g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

(2) $f(x)<h(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x\to a} f(x)<\lim_{x\to a} h(x)<\lim_{x\to a} g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

예제 04 함수 $f(x)$에 대하여 $0\le x\le 2$에서 $2x\le f(x)\le x^2+1$일 때, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값을 구하여라.

풀이 $0\le x\le 2$일 때 $2x\le f(x)\le x^2+1$이므로 $\lim_{x\to 1} 2x \le \lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1}(x^2+1)$

$\lim_{x\to 1} 2x=2$, $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

답 2

문제 6 모든 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $\dfrac{5x+1}{x+3} \le f(x) \le \dfrac{5x^2-3x+6}{x^2}$을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 구하여라.

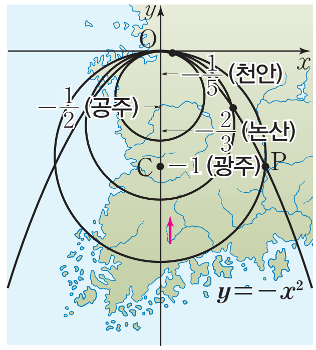
발전

문제 7 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $x^2-1 \le f(x) \le 3x^2-4x+1$을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$의 값을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

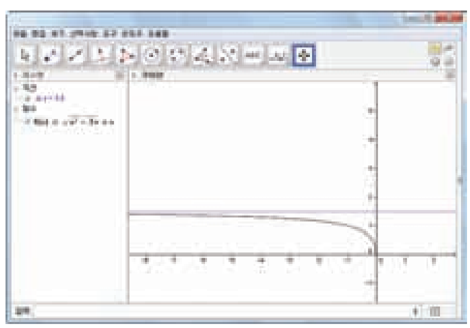
오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2$의 그래프 위의 한 점 P와 원점 O를 지나며 중심이 y축 위에 있는 태풍 C가 북상하며 그 규모가 작아지고 있다. 점 P가 $y=-x^2$의 그래프를 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 태풍의 중심 C가 한없이 가까워지는 지역을 예측하여라.



컴퓨터의 활용

함수의 극한을 확인하여 보자.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 등식 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x}+x)=\frac{3}{2}$이 성립함을 확인하여 보자.



1. 수식 입력 상자에 'sqrt$(x\hat{}2-3*x)+x$'를 입력하면 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-3x}+x$와 그 그래프가 화면에 나타난다.

2. 수식 입력 상자에 '$y=3/2$'을 입력하면 직선 $y=1.5$와 그 그래프가 **1**의 결과와 함께 화면에 나타난다.

3. 마우스 포인터를 그래프로 이동한 후, 마우스 휠을 아래로 돌려 그래프를 축소하여 보면 x의 값이 한없이 작아질 때, y의 값이 $\dfrac{3}{2}$에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.

4. 문제 중에서 복잡한 식을 고르고, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수의 극한값을 확인하여 보자.

[해답 p.196]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

01 함수의 극한의 뜻

(1) $\lim_{x\to1}(x+3)$　(2) $\lim_{x\to2}(x^2-1)$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}$　(4) $\lim_{x\to5}\sqrt{x-3}$

2 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

01 함수의 극한의 뜻

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}$　(2) $\lim_{x\to1}\frac{-1}{|x-1|}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$　(4) $\lim_{x\to-\infty}x^2$

3 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

01 함수의 극한의 뜻

(1) $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}$　(2) $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}$　(4) $\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}$

4 다음 극한값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질

(1) $\lim_{x\to1}(5x^2+4x+2)$　(2) $\lim_{x\to2}(x-1)(3x^2-2x-1)$

(3) $\lim_{x\to3}\frac{2x+3}{x-2}$　(4) $\lim_{x\to4}\left(1-\frac{3}{x-1}\right)$

5 다음 극한값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$　(2) $\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

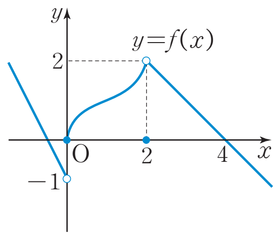
(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-3}{4x^2+1}$　(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{x^2+3}$

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$　(6) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$

[해답 p.196]

중단원 기본

1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중에서 극한값이 존재하지 않는 것을 찾아라.



㉠ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ㉡ $\lim_{x\to 1} f(x)$

㉢ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ㉣ $\lim_{x\to 4} f(x)$

01 함수의 극한의 뜻

2 함수 $f(x)=\begin{cases} x-k & (x<0) \\ x^2-6x+9 & (x\ge 0) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

01 함수의 극한의 뜻
좌극한과 우극한

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 8} \dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$ (2) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

(3) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ (4) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

02 함수의 극한에 대한 성질
극한값의 계산

4 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 3} \dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=1$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

(2) 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-a}$이 0이 아닌 일정한 값을 가질 때,

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-ax+3}$의 값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질
미정계수의 결정

5 모든 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $\dfrac{3x-2}{x}\le f(x)\le \dfrac{3x^2+x}{x^2}$를 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질
함수의 극한의 대소 관계

중단원 실력

1 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x-1}{x^n+1}$에 대하여 $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하는지 말하여라.

01 함수의 극한의 뜻

2 함수의 극한에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다.
ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)$와 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다. (단, $g(x)\neq0$)
ㄹ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이고, $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)<\lim_{x\to a}g(x)$이다.

02 함수의 극한에 대한 성질

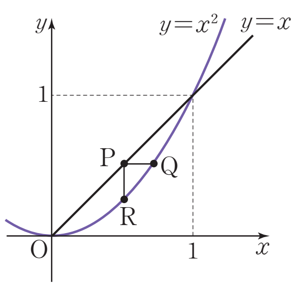
3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to1}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{3f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질

4 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=3$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=2$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질
다항식의 결정

5 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, x)$ $(x>0)$에 대하여 점 P를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 각각 Q, R라고 할 때, $\lim_{x\to1}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값을 구하여라.



02 함수의 극한에 대한 성질
도형에서의 활용

2 함수의 연속

소득이 있는 우리나라 국민은 소득세 납부의 의무가 있다.

소득세는 개인이 회사에서 월급을 받거나, 장사를 해서 이익이 났을 경우에 그 개인의 소득에 대하여 납부하는 세금이다. 특히 회사에서 받는 월급이 개인의 주 소득일 경우에 그 개인을 근로 소득자라고 하며, 근로 소득에 대한 세금을 근로 소득세라고 한다.

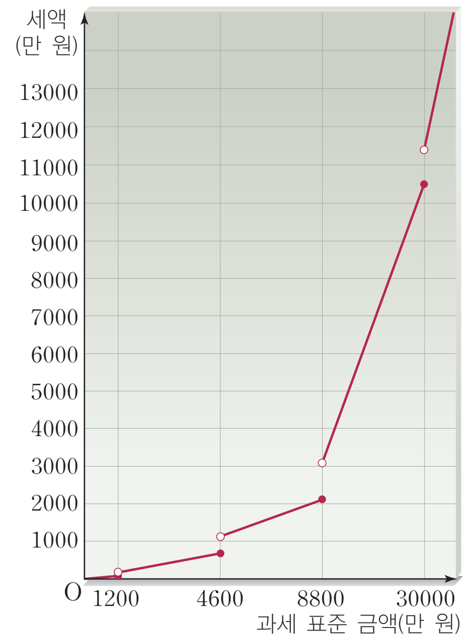
하지만 소득이 많은 사람과 적은 사람이 모두 똑같이 세금을 내는 것은 아니다. 국세청에서는 소득이 높아 과세 표준 금액이 많은 사람에게는 더 높은 세율을 통해 누진세를 부과하고 있다.

2012년 9월 개인의 과세 표준 금액에 대한 기본세율은 다음과 같다.

근로 소득 간이세액표

과세 표준 금액	세율
1200만 원 이하	6 %
1200만 원 초과 4600만 원 이하	15 %
4600만 원 초과 8800만 원 이하	24 %
8800만 원 초과 3억 원 이하	35 %
3억 원 초과	38 %

〈국세청, http://www.nts.go.kr〉



그런데 과세 표준 금액의 경계에 있는 사람은 소득 차이가 얼마 나지 않더라도 세율이 크게 달라지는 불합리한 면이 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 71쪽

근로 소득세 부과의 불합리한 면을 보완할 수 있는 방법은 무엇일까?

01 함수의 연속

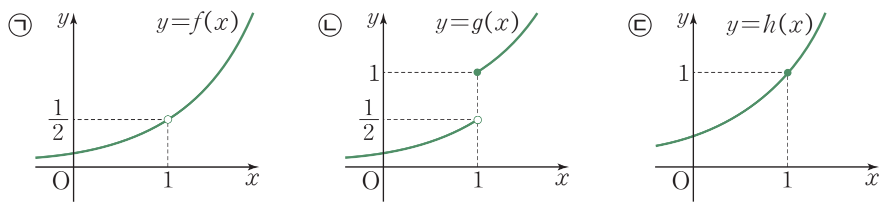
● 함수의 연속의 뜻을 안다.

함수의 연속이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

다음은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. $x=1$에서의 함숫값이 존재하는 그래프를 찾아보자.

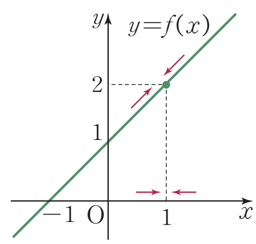
2. $x \to 1$일 때의 극한값이 존재하는 그래프를 찾아보자.

3. $x=1$에서의 함숫값과 $x \to 1$일 때의 극한값이 같은 그래프를 찾아보자.

함수 $f(x)=x+1$에서

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$$

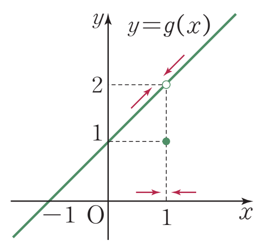
이 성립하고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 연결되어 있다.



그러나 함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$에서

$$\lim_{x\to1} g(x)\neq g(1)$$

이 성립하고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 끊어져 있음을 알 수 있다.



● 함수가 정의되지 않는 점에서도 극한값은 존재할 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

> ❶ 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있다. 즉, a는 함수 f의 정의역에 속한다.
> ❷ 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
> ❸ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다. 즉, 함수 $f(x)$가 ❶, ❷, ❸ 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

예제 01 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2+x$

(2) $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\neq1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$

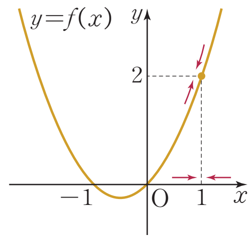
풀이 (1) 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

❶ $f(1)=2$

❷ $\lim_{x\to1} f(x)=2$

❸ $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.



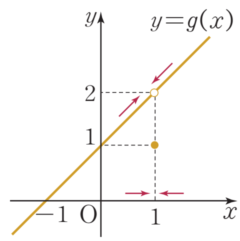
(2) 함수 $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\neq1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$에 대하여

❶ $g(1)=1$

❷ $\lim_{x\to1} g(x)=2$

❸ $\lim_{x\to1} g(x)\neq g(1)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



답 (1) 연속 (2) 불연속

문제 1 다음 함수가 $x=2$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2-1$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & (x\geq2) \\ -1 & (x<2) \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & (x\neq2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$

이제 어떤 범위에서 함수의 연속에 대하여 알아보자.

먼저 어떤 범위에 속하는 모든 실수를 기호로 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

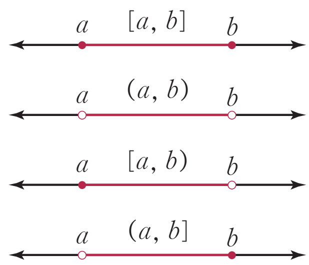
두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 실수의 집합

$$\{x\mid a\le x\le b\},\ \{x\mid a<x<b\}$$
$$\{x\mid a\le x<b\},\ \{x\mid a<x\le b\}$$

를 각각 **구간**이라 하고, 차례로 기호

$$\boldsymbol{[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]}$$

와 같이 나타낸다.



이때 $[a, b]$를 **닫힌 구간**, (a, b)를 **열린 구간**이라 하고, $[a, b)$, $(a, b]$를 **반닫힌 구간** 또는 **반열린 구간**이라고 한다.

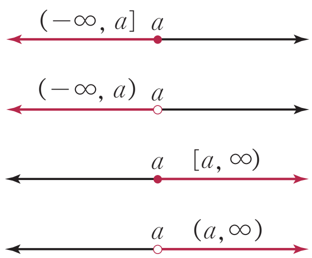
또 실수의 집합

$$\{x\mid x\le a\},\ \{x\mid x<a\}$$
$$\{x\mid x\ge a\},\ \{x\mid x>a\}$$

도 구간이라 하고, 차례로 기호

$$(-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a),\ [a,\ \infty),\ (a,\ \infty)$$

와 같이 나타낸다.



특히 실수 전체의 집합도 하나의 구간으로 보고, 기호로 $(-\infty, \infty)$와 같이 나타낸다.

보기 (1) 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$의 정의역을 구간의 기호로 나타내면 $[-1, \infty)$이다.

(2) 함수 $g(x)=\dfrac{1}{x}$의 정의역을 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$이다.

(3) 함수 $h(x)=x^2$의 정의역을 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, \infty)$이다.

문제 2 다음 함수의 정의역을 구간의 기호를 이용하여 나타내어라.

(1) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ (2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

또 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

반열린 구간이나 구간 $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$에서의 함수의 연속도 마찬가지 방법으로 정한다.

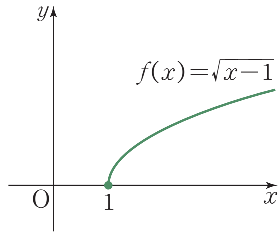
일반적으로 함수 $f(x)$가 정의역 전체에서 연속일 때, 함수 $f(x)$를 **연속함수**라고 한다.

예를 들어 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은

(i) 구간 $(1, \infty)$에서 연속이고

(ii) $\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 연속이다.

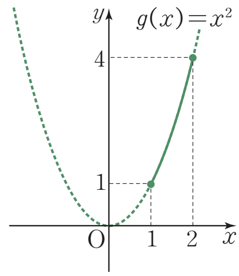


또 함수 $g(x)=x^2$은

(i) 열린 구간 $(1, 2)$에서 연속이고

(ii) $\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$, $\lim_{x\to 2-} g(x)=g(2)$

이므로 함수 $g(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이다.



문제 3 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-3x-4$ (2) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ (3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

예제 02 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$의 연속성을 조사하여라.

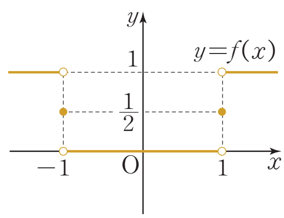
풀이 x의 값에 따라 구간을 나누어 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=0$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1$

(iii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=\dfrac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (|x|<1) \\ 1 & (|x|>1) \\ \dfrac{1}{2} & (|x|=1) \end{cases}$$



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 점에서 연속이다.

답 $x=1$, $x=-1$에서 불연속, 그 밖의 모든 점에서 연속

문제 4 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$의 연속성을 조사하여라.

예제 03

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax+2}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 실수 a, b의 값을 구하여라.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$에서 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-ax+2}{x-2}=b$ ······ ①

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-ax+2}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2-ax+2)=0$에서 $a=3$

$a=3$을 ①에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1=b$$

따라서 $a=3$, $b=1$

답 $a=3$, $b=1$

문제 5 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}+a}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 실수 a, b의 값을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

근로 소득세 부과의 불합리한 면을 보완하기 위하여 국세청에서는 '누진 공제' 방법을 사용하여 세금을 부과하고 있다. 즉, 오른쪽 표와 같이 과세 표준 금액에서 누진 공제 금액 만큼을 빼서 세액이 급격하게 변화하지 않도록 하고 있다.

과세 표준 금액	세율	누진 공제
1200만 원 이하	6 %	—
1200만 원 초과 4600만 원 이하	15 %	108만 원
4600만 원 초과 8800만 원 이하	24 %	k만 원
8800만 원 초과 3억 원 이하	35 %	490만 원
3억 원 초과	38 %	900만 원

(세액)=(과세 표준 금액)×(세율)−(누진 공제)

과세 표준 금액을 x만 원, 세액을 $f(x)$만 원이라고 할 때, 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=1200$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=4600$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

02 연속함수의 성질

● 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

연속함수에 대한 성질은 어떠한가?

탐구 활동 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$은 $x=1$에서 연속이다. 다음 세 학생의 의견 중 잘못된 의견을 찾고, 그 이유를 설명하여 보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=cf(a)\ (\text{단, } c\text{는 상수})$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=f(a)-g(a)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$$

가 성립한다. 특히 $g(a)\neq 0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

가 성립한다.

따라서 함수 $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 모두 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)　　(2) $f(x)\pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$　　(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

일차함수 $y=x$는 모든 실수에서 연속이므로 연속함수의 성질 (3)에 의하여 이 함수의 곱으로 나타나는 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ \cdots,\ y=x^n\ (n\text{은 자연수})$$

도 모든 실수에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 이들 함수에 상수를 곱하여 더한 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

도 모든 실수에서 연속이다.

또 유리함수는 두 다항식의 몫

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\ (P(x),\ Q(x)\text{는 다항식})$$

의 꼴로 나타나므로 연속함수의 성질 (4)에 의하여 분모를 0으로 하는 x의 값을 제외한 모든 실수에서 연속이다.

보기 (1) 함수 $f(x)=x^2-2x-3$은 모든 실수에서 연속이다.

(2) 함수 $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$는 $x\neq -1$인 모든 실수에서 연속이다.

문제 1 다음 함수의 연속성을 조사하여라.

(1) $f(x)=-x^2+4$　　(2) $f(x)=(3x+1)(x^3-2)$　　(3) $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

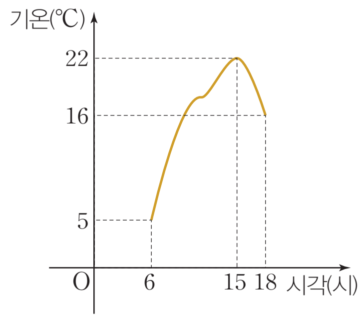
유리함수 중 실수 전체의 집합에서 연속인 예를 말하여 보자.

최대 · 최소 정리란 무엇인가?

탐구 활동

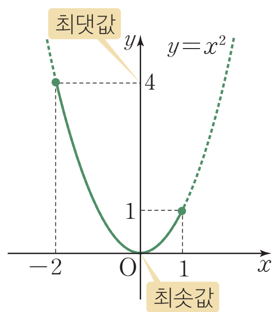
오른쪽 그래프는 어느 날 오전 6시부터 오후 6시까지 12시간 동안 기온 변화를 측정하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 기온이 최대일 때의 시각과 온도를 말하여 보자.
2. 기온이 최소일 때의 시각과 온도를 말하여 보자.

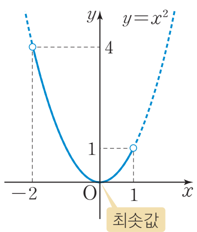


위의 그래프에서 기온은 측정 시각에 따라 연속적으로 변하므로 일정한 범위에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

이를테면 닫힌 구간 $[-2, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$은 이 구간에서 $x=-2$일 때 최댓값 4를 가지고, $x=0$일 때 최솟값 0을 가진다.



한편 열린 구간 $(-2, 1)$에서 함수 $f(x)=x^2$은 이 구간에서 최댓값은 갖지 않고 최솟값만을 가진다.

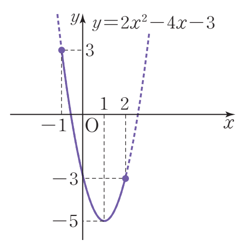


일반적으로 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **최대 · 최소 정리**가 성립한다.

> **최대 · 최소 정리**
>
> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

닫힌 구간이 아닌 구간에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

보기 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=2x^2-4x-3$은 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다.
즉, 치역이 닫힌 구간 $[-5, 3]$이므로 $x=-1$일 때 최댓값은 3이고, $x=1$일 때 최솟값은 -5이다.



문제 2 다음 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^2-2x+3$ $[-2, 1]$

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $[2, 5]$

(3) $f(x)=\sqrt{2-x}$ $[-3, 2]$

사이값 정리란 무엇인가?

탐구 활동

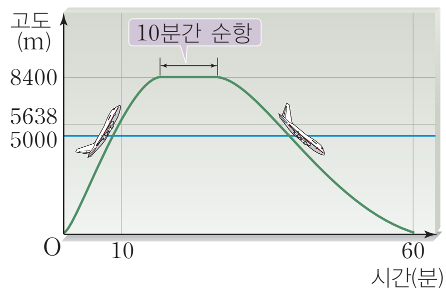
김포 공항에서 제주 공항까지 가는 비행기에 탑승한 채영이는 이륙 후 기내의 화면에서 현재 고도가 5638 m임을 확인하였다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이륙 후부터 착륙 시까지 비행기의 고도는 연속적으로 변하겠는가?

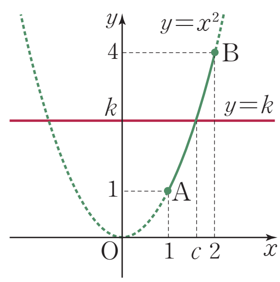
2. 착륙 시까지 비행기의 고도가 5000 m인 순간이 반드시 있다고 할 수 있는지 말하여 보자.

비행기의 고도는 연속적으로 변하므로 시간에 따른 고도의 그래프는 연속이다. 따라서 현재 고도가 5638 m이므로 이륙 후 5000 m인 순간과 착륙 전 5000 m인 순간이 반드시 존재한다고 할 수 있다.

비행기의 고도 변화



이를테면 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ 사이에서 이어져 있다.



따라서 $1<k<4$인 임의의 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$는 이 그래프와 적어도 한 점에서 만난다.

즉, 1과 4 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

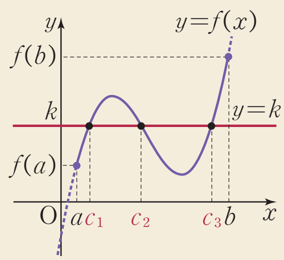
일반적으로 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **사이값 정리**가 성립한다.

사이값 정리

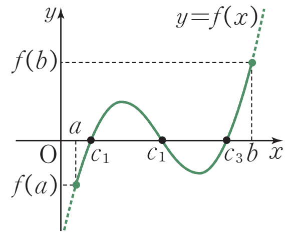
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k\ (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.



특히 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가진다.



예제 01 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

풀이 $f(x)=x^3+3x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$$f(0)=-2<0,\ f(1)=2>0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

문제 3 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $x^3-3x+1=0 \quad (1, 2)$

(2) $\dfrac{3}{x}-5x+1=0 \quad \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

발전

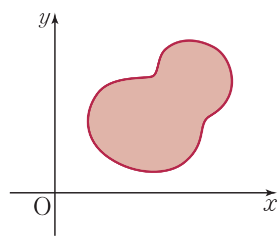
문제 4 다음 물음에 답하여라.

(1) 열린 구간에서 연속이지만, 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않는 예를 찾아라.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 같을 때, $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 존재하는지 설명하여라.

창의 up

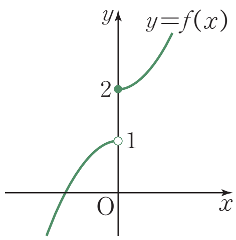
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 도형이 있다. 이 도형의 넓이를 y축과 평행한 직선으로 이등분할 수 있는지를 사이값 정리를 이용하여 설명하여라.



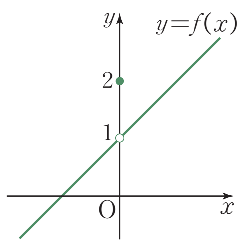
중단원 기초

1 다음 함수가 $x=0$에서 연속이 아닌 이유를 설명하여라.

(1)



(2)



01 함수의 연속

2 다음 함수가 연속인 x값의 범위를 구간의 기호로 나타내어라.

(1) $f(x)=\sqrt{5-x}$　(2) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$　(3) $f(x)=2$

01 함수의 연속

3 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-3x+2$에 대하여 다음 함수가 연속인 x값의 범위를 구간의 기호로 나타내어라.

(1) $2f(x)+g(x)$　(2) $f(x)g(x)$　(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

02 연속함수의 성질

4 다음 함수가 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 가지면 그 값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-6x+4$　$[-2, 3]$

(2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$　$[1, 4]$

02 연속함수의 성질
최대 · 최소 정리

5 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

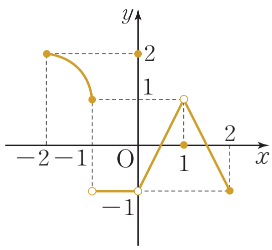
(1) $x^3+3x-2=0$　$(-1, 1)$

(2) $x^4+x^3-8x+1=0$　$(1, 2)$

02 연속함수의 성질
사이값 정리

중단원 기본

1 $-2\le x\le 2$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 구간에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 점의 개수를 a, $f(x)$가 불연속인 점의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.



01 함수의 연속

2 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & (x\ne 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$

가 $x=0$에서 연속이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

01 함수의 연속

3 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+a}{x^n+1}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

01 함수의 연속

4 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 다음 함수 중 $x=a$에서 항상 연속인 함수의 개수를 구하여라. (단, $g(a)\ne 0$이고 $g(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역에 포함된다.)

㉠ $f(x)-2g(x)$	㉡ $\{f(x)\}^2$
㉢ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	㉣ $f(g(x))$

02 연속함수의 성질

5 방정식 $x^2-2x+k=0$이 구간 $(1, 3)$에서 실근을 갖도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

02 연속함수의 성질
사이값 정리

중단원 실력

1 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax+b}{x^{2n}+1}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

01 함수의 연속

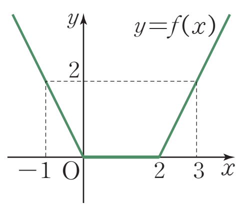
2 함수 $f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$의 그래프를 그려라.

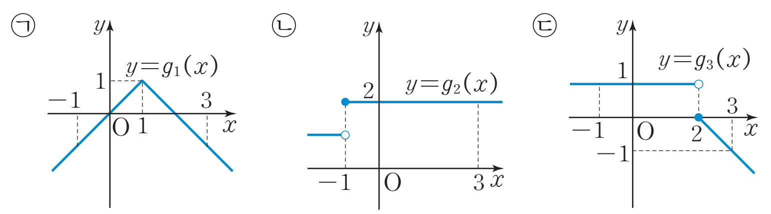
(2) 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값을 구하여라.

01 함수의 연속

3 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음의 함수 $y=g_k(x)$ $(k=1, 2, 3)$의 그래프 중 함수 $y=f(x)g_k(x)$가 구간 $[-1, 3]$에서 연속이 되는 것을 모두 찾아라.



02 연속함수의 성질



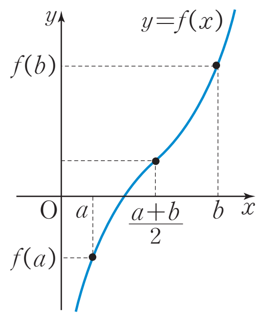
4 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키고 $f(0)f(1)<0$, $f(2)f(3)<0$일 때, 방정식 $f(x)=0$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

02 연속함수의 성질
사이값 정리

이분법(Bisection method)

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면, 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 열린 구간 (a, b)를 계속 절반으로 줄여가면서 사이값 정리를 이용하면 방정식 $f(x)=0$의 실근에 가까운 값을 구할 수 있다. 즉, 구간 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$와 구간 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$에 사이값 정리를 다시 한 번 적용하면 실근이 둘 중 적어도 한 곳에 반드시 있다고 말할 수 있다.



이와 같이 주어진 구간을 절반씩 나누어 반드시 실근이 존재하는 구간을 선택하는 과정을 반복하면 방정식 $f(x)=0$의 실근에 거의 가까운 값을 원하는 만큼 정확하게 구할 수 있다. 이런 방법을 이분법(Bisection method)이라고 한다.

예를 들어 $f(x)=x^3+3x-1$이라고 하면, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(1)=3>0$이므로 방정식 $x^3+3x-1=0$의 한 실근은 열린 구간 $(0, 1)$에 있다. 이때 다음 사실을 알 수 있다.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0$이므로 이 실근은 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 있다.

(2) $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{15}{64}<0$이므로 이 실근은 열린 구간 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$에 있다.

이와 같은 과정을 반복하면 주어진 방정식의 한 실근은 다음 구간에 있음을 알 수 있다.

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{11}{32}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{21}{64}\right), \cdots$$

| 과 제 | 1 방정식 $x^3-2x-3=0$은 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다. 이분법을 세 번 이용하여 방정식 $x^3-2x-3=0$의 실근이 존재하는 구간을 구하여라.

대단원 학습 내용 정리

1 함수의 극한의 뜻

함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고, α를 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

좌극한과 우극한

(1) x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 극한값 α를 $\lim_{x \to a-} f(x)=\alpha$와 같이 나타내고, α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라고 한다.

(2) x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 극한값 β를 $\lim_{x \to a+} f(x)=\beta$와 같이 나타내고, β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라고 한다.

2 함수의 극한에 대한 성질

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} cf(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에 대하여

(1) $f(x) \leq g(x)$이면 $\alpha \leq \beta$

(2) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$

(3) $f(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x \to a} f(x)<\lim_{x \to a} g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

(4) $f(x)<h(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x \to a} f(x)<\lim_{x \to a} h(x)<\lim_{x \to a} g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

3 함수의 연속

연속과 불연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여

❶ 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있다.

❷ 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

❸ $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

를 만족시키면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

한편 함수 $f(x)$가 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

4 연속함수의 성질

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 모두 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

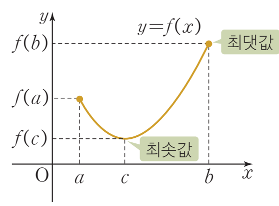
(2) $f(x) \pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

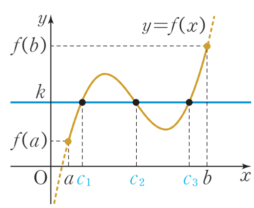
최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.



사이값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$ $(a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

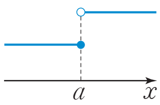


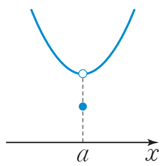
용어와 기호 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(반열린) 구간, 좌극한, 우극한, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소 정리, 사이값 정리, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)$

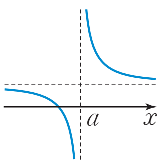
대/단/원 평가 문제

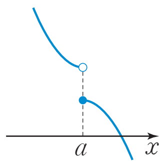
선택형

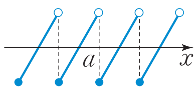
1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $\lim_{x \to a} f(x)$의 값이 존재하는 것은?

①


②


③


④


⑤


2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$\lim_{x \to 1} f(x)=2$, $\lim_{x \to 1} g(x)=3$을 만족시킬 때,

다음 중 계산이 옳지 않은 것은? (단, $g(x) \neq 0$)

① $\lim_{x \to 1}\{f(x)+g(x)\}=5$

② $\lim_{x \to 1}\{f(x)\}^2=4$

③ $\lim_{x \to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3}{2}$

④ $\lim_{x \to 1}\dfrac{f(x)}{\{g(x)\}^2}=\dfrac{2}{9}$

⑤ $\lim_{x \to 1}\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}=-\dfrac{1}{3}$

3 $\lim_{x \to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+7}-4}$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{2}{3}$　③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{3}$

4 $\lim_{x \to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-4x}{x-1}$의 값은?

① -3　② -2　③ -1

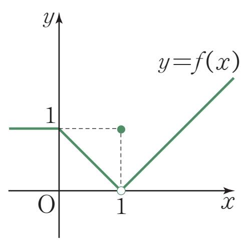
④ 0　⑤ 1

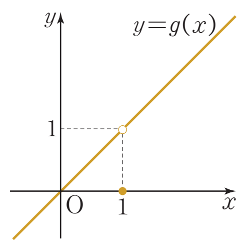
5 $\lim_{x \to 1}\dfrac{3x^2+ax+b}{x-1}=3$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

6 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음과 같을 때, 다음 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?





ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(g(x))=0$

ㄷ. 합성함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[해답 p.200]

7 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n+1}+1}$이 불연속인 x의 개수는?

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

8 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-2)f(x)=x^2+ax+6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

9 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(x)$, $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
ㄷ. $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 연속함수 $f(x)$에 대하여
$f(-1)=-2$, $f(0)=2$, $f(1)=-1$, $f(2)=3$
일 때, 방정식 $f(x)-x=0$은 구간 $(-1, 2)$에서 적어도 n개의 실근을 가진다. 이때 n의 값은?

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

서답형

11 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-3$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-6$일 때,

$f(x)$를 구하여라.

12 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$5x^2-2\le f(x)\le 5x^2+7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

서술형

13 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

서술형

14 성진이는 2014년 4월 1일에 자신의 손목시계를 보니 정확한 시각보다 10분 빨랐었고, 2014년 5월 1일에는 정확한 시각보다 5분 늦게 가고 있었다고 한다. 이 기간 동안에 성진이의 시계가 정확한 시각을 나타내는 순간이 적어도 한 번 있었음을 보여라.

M+ Real Life

수 학 ✚ 실 생 활

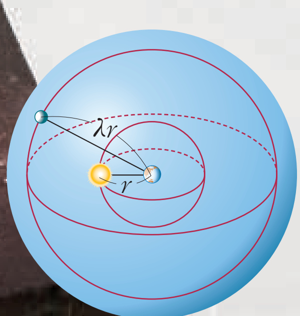
밤하늘은 왜 어두울까? –올베르스의 역설(Olbers' paradox)

현재도 쓰고 있는 소행성의 궤도 계산에 지대한 공헌을 한 독일의 천문학자인 올베르스(Olbers, H. W. M. ; 1758~1840)는 무수한 별이 하늘에 균등히 분포되어 있다면 밤하늘의 밝기가 낮과 똑같아야 한다고 지적하며 정적인 무한 우주에 대한 역설을 발표하였다.

우주 공간에 균일한 평균 밀도를 지닌 별들이 고르게 흩어져 있다면 변하지 않는 무한히 많은 별들에서 비춰지는 전체 별빛은 쉽게 계산할 수 있다.

별의 밝기는 거리의 제곱에 반비례하므로 어떤 별이 지구와 태양 사이의 거리의 k배 멀리 있다고 생각하면, 그 별빛의 세기는 태양빛의 $\frac{1}{k^2}$ 배로 희미해진다.

그러나 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$이고, 반지름의 길이가 λr인 구의 겉넓이는 $4\pi\lambda^2 r^2$이기 때문에 우주 공간에 균등한 평균 밀도를 가진 별들이 고르게 흩어져 있다면, 거리에 대한 별들의 숫자는 거리의 제곱에 비례하여 증가한다.



따라서 우주가 균일한 빛을 가진 별을 가진다고 가정했을 때 전체 별빛과 태양빛의 세기는 동일하고, 하늘은 늘 정오의 태양처럼 밝아야 한다는 결론이 나온다.

실제로 우리에게는 어두운 밤이 있고, 낮도 한없이 밝은 것은 아니다. 역설을 제기한 장본인인 올베르스는 그 이유로 우주 공간에 퍼져 있는 방대한 양의 먼지와 가스 구름들이 별빛을 흡수하기 때문에 모든 별빛이 지구에 도달할 수 없다는 '가스층 흡수 이론'을 주장하였다.

그러나 오랜 세월 동안 별들이 우주 공간으로 방출한 열과 빛에 노출된 먼지와 가스층이 발광 성운이 되어 흡수한 복사와 똑같은 강도의 복사를 방출하게 되고, 별들이 영원히 타오른다면 이러한 복사는 무한대의 세기를 가질 것이다. 따라서 우주는 수천 ℃의 온도를 가진 열복사로 가득차서 밤하늘은 어둡기보다는 높은 온도에서 환하게 빛날 것이기 때문에 올베르스의 역설을 완전히 해결할 수는 없다.

영국의 물리학자 켈빈(Kelvin, W. T. ; 1824～1907)은 유한한 속도를 가지고 있는 빛이 특정 거리를 진행하려면 반드시 시간이 소요되므로 밤하늘을 가득 메우고 있는 별의 모습은 지금 이순간의 모습이 아니라 과거의 모습이라고 하면서, 밤하늘이 밝게 빛나려면 우주는 적어도 수백 조 광년 이상 뻗어 있어야 하지만 우리 우주가 아직 그 정도 나이를 먹지 않았기 때문에 밤하늘이 어둡게 보인다고 설명하였다.

즉, 빛의 속도는 유한하여 일부 빛은 아직 지구에 도달하지 않았으며, 빅뱅 우주론에 따르면 우주는 유한한 나이를 가지기 때문에 별들이 일정 거리 안에만 존재하고, 우주가 팽창하기 때문에 세월이 흐를수록 아직 도달하지 못한 별빛들이 마저 도달하여 밤하늘의 밝기가 점차 밝아지는 현상도 나타나지 않는다.

변하지 않는 것은 아무것도 없다는 말처럼

세상은 변화하는 것으로 가득 차 있다.

다항함수의 미분법

III

| 준 | 비 | 학 | 습 |

미적분 I 함수의 극한

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (2) $\lim_{h \to 1} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

수학 I 직선의 방정식

2 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선

(2) 두 점 $(1, 2)$, $(3, 8)$을 지나는 직선

수학 II 이차함수의 최대 · 최소

3 주어진 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^2-2x+3$ $(-1 \le x \le 2)$

(2) $y=-x^2-2$ $(1 \le x \le 3)$

1 미분계수와 도함수

탄산음료의 톡 쏘는 맛은 압력과 온도에 따라 달라진다.

물에는 많지는 않지만 어느 정도의 기체가 녹아 있는데 물에 녹는 기체는 일반적으로 물의 온도가 낮을수록 그리고 압력이 높을수록 많이 녹게 된다.

탄산음료병의 뚜껑을 열면 소리와 함께 기포가 올라오는 것을 볼 수 있는데 이것은 탄산음료에 가해지는 압력이 낮아져 탄산음료에 녹아 있던 이산화탄소가 기화되면서 볼 수 있는 현상이다. 또 탄산음료를 마실 때, 혀와 목에 톡 쏘는 맛이 느껴지는 것은 입안의 온도가 높아 탄산음료에 녹아 있던 이산화탄소가 보다 많이 기화되면서 피부에 자극을 주기 때문이다. 따라서 이산화탄소가 많이 기화될수록 톡 쏘는 맛을 많이 느낄 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 102쪽

온도 변화에 따른 탄산음료의 톡 쏘는 맛의 정도를 설명할 수 있을까?

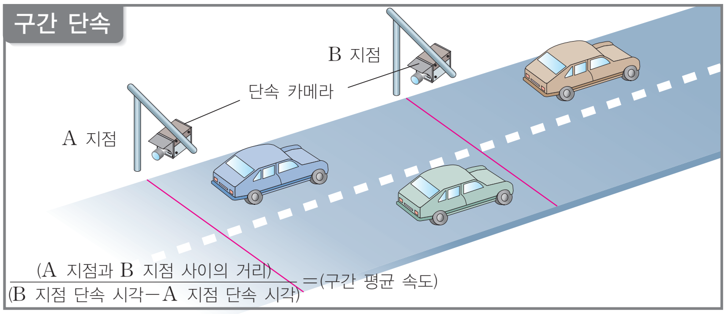
01 미분계수

● 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

평균변화율이란 무엇인가?

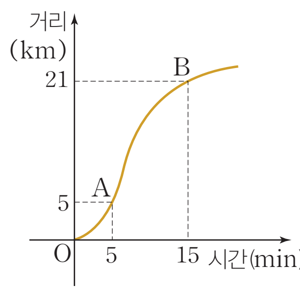
생각 열기

도로의 특정한 구간이 시작되는 지점과 끝나는 지점에 카메라를 각각 설치하고 차량의 통과 시각을 측정하여 제한 속도 이상으로 주행한 차량을 단속하는 것을 구간 단속이라고 한다.



탐구 활동

민호는 아버지와 함께 승용차를 타고 구간 단속을 하는 고속 국도를 지났다. A 지점과 B 지점 사이의 이동한 시간과 거리가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.



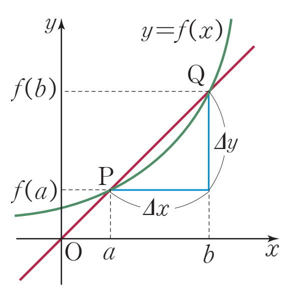
1. A 지점에서 B 지점까지 평균 속도(km/min)를 구하여 보자.

2. 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 구하여 보자.

3. **1**과 **2**의 결과를 서로 비교하여 보자.

함수 $y=f(x)$에 대하여 x값의 변화량과 y값의 변화량의 비는 그래프의 기울기와 어떤 관계가 있는지 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.



이때 x값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, y값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각

$$\boldsymbol{\Delta x,\ \Delta y}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\Delta x=b-a,\ \Delta y=f(b)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이다.

● Δ는 차를 뜻하는 영어 Difference의 첫 글자 D에 해당하는 그리스 문자로 '델타(delta)'라고 읽는다.

또 함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

한편 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 앞의 그래프에서 알 수 있듯이 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

예제 01 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) -2에서 3까지　　(2) a에서 $a+\Delta x$까지

풀이 (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{3^2-(-2)^2}{3-(-2)}=1$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\dfrac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}=2a+\Delta x$

답 (1) 1　(2) $2a+\Delta x$

문제 1 함수 $f(x)=x^3+4$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) 1에서 3까지　　(2) a에서 $a+\Delta x$까지

문제 2 높이가 100 m인 번지 점프대에서 뛰어내린 사람의 x초 후의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+100$이 성립한다고 한다. x의 값이 다음과 같이 변할 때, 높이의 평균변화율을 구하여라.

(1) 1에서 4까지

(2) a에서 $a+\Delta x$까지

미분계수란 무엇인가?

탐구 활동

열차가 플랫폼으로 들어오며 제동을 건 후 x초까지 이동한 거리를 y m라고 하면 $y=60x-1.5x^2$이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. x의 값이 10에서 $10+\Delta x$까지 변할 때 열차의 평균 속도를 구하는 식을 써 보자.

2. 제동을 건 후 열차의 각 구간별 평균 속도를 구하여 보자.

구간(초)	10~11	10~10.1	10~10.01	10~10.001
평균 속도(m/s)				

3. $x=10$인 순간의 열차 속도를 추측하여 보자.

함수 $y=f(x)$에서 $x=a$인 순간에 함숫값의 변화를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \qquad \cdots\cdots ①$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 이것을 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

특히 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

한편 ①에서 $a+\Delta x=x$라고 하면 $\Delta x=x-a$이고 $\Delta x \to 0$일 때 $x \to a$이므로

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이다. 따라서

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

● $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$가 존재 $\iff \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

● 프랑스 수학자 라그랑주(Lagrange, J. L.; 1736~1813)는 미분계수를 나타내는 기호 $f'(a)$를 처음으로 사용하였다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예제 02

다음 함수의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=3x-1$　　　　(2) $f(x)=x^2$

풀이 (1) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)-1\}-(3\cdot 1-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$

(2) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

답 (1) 3　(2) 2

문제 3 다음 함수의 $x=3$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=4x+3$　　　　(2) $f(x)=-x^2+x$

문제 4 함수 $f(x)=ax+3$의 $x=2$에서의 미분계수가 5일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

실생활

문제 5 제품 x개를 생산하는 데 소요되는 총비용을 $C(x)$라고 하면 함수 $C(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율을 a개를 생산할 때의 한계 비용이라고 한다. 한 회사가 어떤 제품 x개를 생산하는 데, 소요되는 총비용이

$$C(x)=10000+50x+0.1x^2\text{(원)}$$

이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 제품의 생산량이 100개에서 200개로 증가할 때, 총비용의 평균변화율을 구하여라.

(2) 제품의 생산량이 100개일 때의 한계 비용을 구하여라.

02

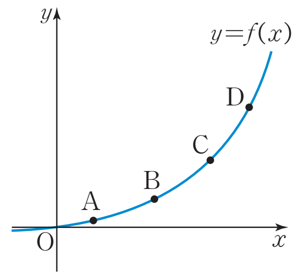
미분계수의 의미와 연속성

- 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
- 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

미분계수는 기하학적으로 어떤 의미가 있는가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 네 점 A, B, C, D를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에 접하는 직선을 그려 보자.

2. 점 A와 세 점 D, C, B를 잇는 직선을 각각 그려 보자.

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위를 움직이는 점 P가 세 점 D, C, B를 차례로 지나 점 A에 가까워질 때, 두 점 A, P를 잇는 직선은 어떤 직선에 가까워지는지 말하여 보자.

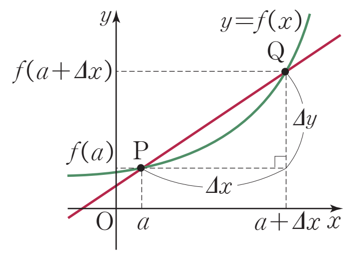
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점

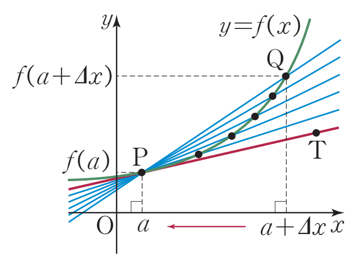
$$\mathrm{P}(a, f(a)),\ \mathrm{Q}(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$$

를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



이때 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 점 P를 지나는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다.

이 직선 PT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이라 하고, 점 P를 이 접선의 접점이라고 한다.

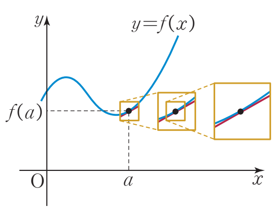


따라서 $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 직선 PQ의 기울기의 극한값, 즉 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선 PT의 기울기와 같음을 알 수 있다.

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 점 $(a, f(a))$를 포함하는 부분을 확대하면 거의 직선처럼 보인다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 01 곡선 $y=x^2-3x+5$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2-3x+5$로 놓으면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+5\}-(1^2-3\cdot 1+5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(-1+\Delta x) \\ &= -1 \end{aligned}$$

답 -1

문제 1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

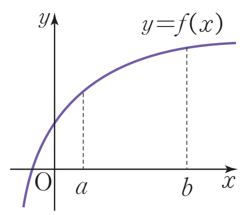
(1) $y=x^2+3x$ $(1, 4)$

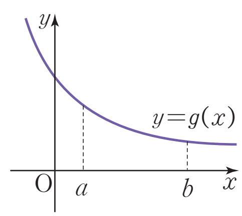
(2) $y=-x^3+2$ $(2, -6)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같을 때, 다음 식의 값의 크기를 비교하여 보자.



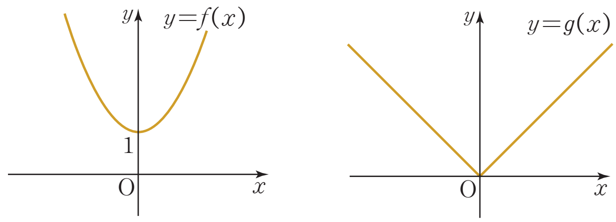


(1) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $f'(a)$, $f'(b)$

(2) $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$, $g'(a)$, $g'(b)$

미분가능성과 연속성 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동 다음 그림은 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=|x|$의 그래프이다. 물음에 답하여 보자.



1. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=0$에서 연속인지 불연속인지 조사하여 보자.

2. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능한지 알아보자.

함수의 미분가능성과 연속성 사이의 관계를 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\&=f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

이다. 즉,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

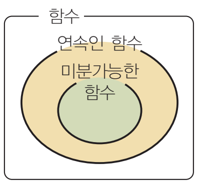
이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

● $\lim_{x\to a}\{f(x)-k\}=0$
$\Longleftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=k$ (k는 상수)

한편 탐구 활동에서의 함수 $g(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 즉, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 항상 미분가능한 것은 아니다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$



미분가능성과 연속성 사이의 관계

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

예제 02

함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

풀이 $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}|x^2-1|=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

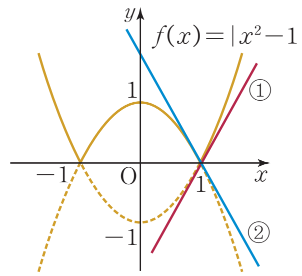
한편

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}=2$$

(직선 ①의 기울기)

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=-2$$

(직선 ②의 기울기)



이므로 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

문제 2 함수 $f(x)=|3x-9|$는 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

발전

문제 3 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

(2) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능한가?

사고력 기르기

추론

▶ 의사소통

문제 해결

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+4 & (x\ge1) \\ -x & (x<1)\end{cases}$에 대한 대화를 보고, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$을 확인하지 않고도 이 함수가 $x=1$에서 미분가능한지 알 수 있는 이유에 대하여 토의하여 보자.

03 도함수

● 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
● 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

도함수란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

함수 $f(x)=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$을 구하여 보자.

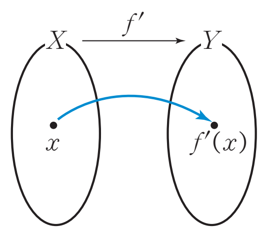
2. $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 구하여 보자.

3. **2**의 결과를 이용하여 다음 표를 완성하여 보자.

a	1	2	3	4
$f'(a)$				

임의의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^2$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 $f'(a)=2a$이다. 따라서 실수 a의 값에 따라 미분계수 $f'(a)$의 값이 하나씩 정해진다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 미분가능한 각 점 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시켜 만든 새로운 함수를 함수 $y=f(x)$의 **도함수**라 하고, 이것을 기호로



$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

이다.

$\frac{dy}{dx}$는 dy를 dx로 나눈다는 뜻이 아니라, y를 x에 대하여 미분한다는 뜻이다.

예를 들어 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=x^2$일 때, $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=2x,\quad y'=2x,\quad \frac{dy}{dx}=2x,\quad \frac{d}{dx}f(x)=2x$$

와 같이 나타낼 수 있다.

함수 $y=f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

또 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도함수의 정의

함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Δx 대신에 h를 대입하면 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

예제 01 다음 함수의 도함수를 구하고, $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=2x+3$ (2) $f(x)=4x^2$

풀이 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}2=2$

따라서 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)=2$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(8x+4h)=8x$

따라서 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)=8\cdot 1=8$

답 (1) $f'(x)=2$, $f'(1)=2$ (2) $f'(x)=8x$, $f'(1)=8$

문제 1 다음 함수의 도함수를 구하고, $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=50$ (2) $f(x)=x+3$

(3) $f(x)=x^2-7x$ (4) $f(x)=x^3$

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 **세 함수 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 위의 세 함수의 도함수를 각각 구하여 보자.

2. **1**의 결과로부터 함수 $y=x^4$의 도함수를 추측하여 보자.

이제 도함수의 정의를 이용하여 양의 정수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^n$의 도함수를 구하여 보자.

a^n-b^n
$=(a-b)$
$\times(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h\to0}\frac{h\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h\to0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\} \\ &= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

특히 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=0 \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$y=x^n$과 상수함수의 도함수

(1) $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(2) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

보기 두 함수 $y=x^5$, $y=3$의 도함수는 각각 $y'=5x^4$, $y'=0$이다.

문제 2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^9$ (2) $y=x^{11}$ (3) $y=\frac{2}{5}$ (4) $y=\sqrt{7}$

함수의 실수배, 합, 차, 곱은 어떻게 미분하는가?

미분가능한 함수의 실수배, 합, 차로 이루어진 함수의 도함수를 구하여 보자.

[1] 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $y=cf(x)$(c는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h} \\ &= c\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

이다.

[2] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 미분가능할 때, $y=f(x)+g(x)$라고 하면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

이다.

[3] [2]와 같은 방법으로 $y=f(x)-g(x)$의 도함수를 구하면

$$y'=f'(x)-g'(x)$$

임을 알 수 있다.

$\{f(x)-g(x)\}'$
$=\{f(x)+(-1)g(x)\}'$
$=f'(x)-g'(x)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

(2) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(3) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

참고 함수의 합, 차의 미분법은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다. 예를 들어 $\{f(x)+g(x)+h(x)\}'=f'(x)+g'(x)+h'(x)$이다.

예제 02 함수 $y=2x^3-4x^2+3x+1$을 미분하여라.

풀이 $y'=(2x^3-4x^2+3x+1)'$

$=(2x^3)'-(4x^2)'+(3x)'+(1)'$

$=2(x^3)'-4(x^2)'+3(x)'+(1)'$

$=2\cdot 3x^2-4\cdot 2x+3\cdot 1+0$

$=6x^2-8x+3$

답 $y'=6x^2-8x+3$

문제 3 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^3-6x^2+4$

(2) $y=x^4-x^3+2x^2+4$

미분가능한 두 함수의 곱으로 이루어진 함수의 도함수를 구하여 보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 미분가능할 때, $y=f(x)g(x)$라고 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

이다. 여기서 분자에 $f(x)g(x+h)$를 빼고 더하면

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

이다.

함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로
$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

예제 03 함수 $y=(x+2)(x^2-5x-3)$을 미분하여라.

풀이 $y'=\{(x+2)(x^2-5x-3)\}'$

$=(x+2)'(x^2-5x-3)+(x+2)(x^2-5x-3)'$

$=1\cdot(x^2-5x-3)+(x+2)\cdot(2x-5)$

$=3x^2-6x-13$

답 $y'=3x^2-6x-13$

문제 4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(x^2-2x)(x^3-1)$ (2) $y=(2x^2+2)(x-1)$

(3) $y=(x^3+x)(2x-5)$ (4) $y=(x^3-3)(2x^2-x+1)$

발전

문제 5 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x(x-1)(2x+3)$ (2) $y=(x+1)(x+2)(x^2+3)$

사고력 기르기

추론

의사소통

▶ 문제 해결

다음 물음에 답하여 보자.

(1) 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수가 $y'=2f(x)f'(x)$임을 설명하여 보자.

(2) (1)을 이용하여 다항식 x^7-x^3+5를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여 보자.

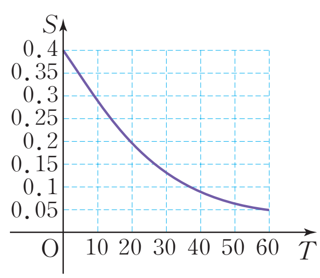
단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 온도가 T ℃일 때, 탄산음료 100 g당 녹아 있는 이산화탄소의 양 S g은

$$S(T)=A(T-60)^2+0.05\,(0\le T\le 60)$$

라고 한다. 다음 물음에 답하여라. (단, $A=9.7\times10^{-5}$)



(1) 도함수 $S'(T)$를 구하고, 그 의미를 설명하여라.

(2) 온도가 각각 10 ℃, 20 ℃인 탄산음료가 있다. 그래프를 이용하여 톡 쏘는 맛이 순간적으로 크게 느껴지는 탄산음료를 찾아라.

1 함수 $f(x)=2x^2-3$에 대하여 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때, 다음을 구하여라.

(1) x의 증분　(2) y의 증분　(3) 평균변화율

01 미분계수
평균변화율

2 다음 함수의 $x=4$에서의 미분계수를 정의를 이용하여 구하여라.

(1) $f(x)=4x+3$　(2) $f(x)=3$

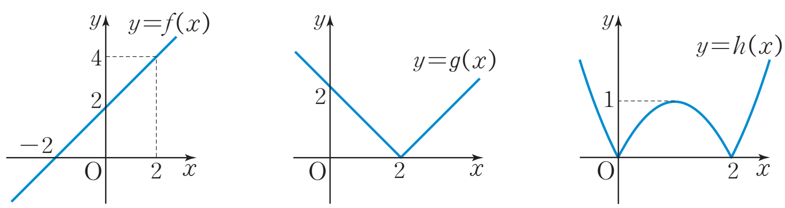
01 미분계수

3 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(1) $y=3x^2$ $(1,\ 3)$　(2) $y=-x^3+1$ $(-1,\ 2)$

02 미분계수의 의미와 연속성
미분계수의 기하학적 의미

4 세 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=|x-2|$, $h(x)=|x^2-2x|$의 그래프가 각각 다음과 같을 때, $x=2$에서 미분가능성과 연속성을 조사하여라.



02 미분계수의 의미와 연속성
미분가능성과 연속성

5 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=5$　(2) $f(x)=x^2-2x$

03 도함수
도함수의 정의

6 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^8$　(2) $y=\pi$

(3) $y=3x^2-4x+6$　(4) $y=2x^5-\dfrac{1}{2}x^4-x+5$

(5) $y=(2x-5)(x^2+x-1)$　(6) $y=(x+2)(7x^3-x+4)$

03 도함수
실수배, 합, 차, 곱의 미분법

[해답 p.202]

중단원 기본

수준별 학습

1 함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 $x=c$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 c의 값을 구하여라.

01 미분계수
평균변화율과 미분계수

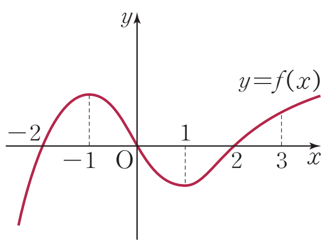
2 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=5$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$　　(2) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+5\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$

01 미분계수

3 오른쪽 그림은 모든 실수에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 다음의 값을 큰 수부터 차례로 나열하여라.

$f'(-2), f'(-1), f'(0), f'(2), f'(3)$



02 미분계수의 의미와 연속성
미분계수의 기하학적 의미

4 함수 $f(x)=\begin{cases} 4x-b & (x<1) \\ ax^2 & (x\ge1) \end{cases}$ 이 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

02 미분계수의 의미와 연속성
연속성과 미분가능성

5 다항식 x^3+ax^2+b가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

03 도함수
곱의 미분법

중단원 실력

1 함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 5이고, x의 값이 3에서 4까지 변할 때의 평균변화율은 2이다. 이때 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

01 미분계수
평균변화율

2 함수 $f(x)$가 $f(2)=3$, $f'(2)=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$의 값을 구하여라.

01 미분계수

3 함수 $f(x)=x^n|x|$ $(n=-1,\ 0,\ 1)$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

02 미분계수의 의미와 연속성

4 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

를 만족시키고 $f'(5)=7$일 때, 도함수 $f'(x)$를 구하여라.

03 도함수
도함수의 정의

5 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3,\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2}=4$$

가 성립할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

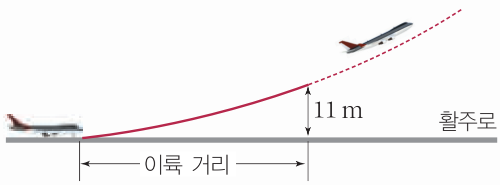
03 도함수
곱의 미분법

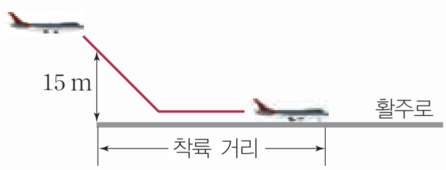
2 도함수의 활용

항공기의 이착륙을 위해서는 충분한 길이의 활주로가 필요하다.

항공기의 이륙 거리는 항공기가 활주로에 멈춰선 지점으로부터 활주를 시작해 바퀴가 지면에서 떨어져 활주로 상공 약 11 m에 이르기까지의 거리를 말한다. 또 착륙 거리는 항공기가 진입한 활주로 상공 약 15 m 지점부터 활주 후 정지 지점까지의 거리를 말한다.

항공기는 이륙하는 데 필요한 양력을 얻을 때까지 충분한 거리를 활주해야 하는데, 보통 대형기의 경우 이륙 거리는 3천여 m 정도이며, 착륙 거리는 2천여 m 정도이다.





단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

130쪽

항공기가 이륙하기 위해 필요한 거리를 구할 수 있을까?

01 접선의 방정식

● 접선의 방정식을 구할 수 있다.

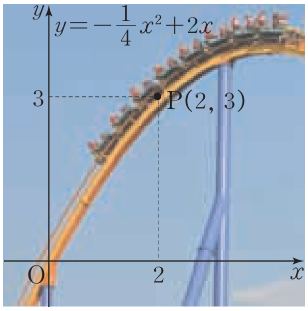
접선의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

다음 그림은 어느 롤러코스터의 레일의 일부를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 레일의 어떤 점을 기준으로 수평 거리가 x m 되었을 때의 높이 y m가

$$y=-\frac{1}{4}x^2+2x$$

라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. 점 $\mathrm{P}(2, 3)$에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.

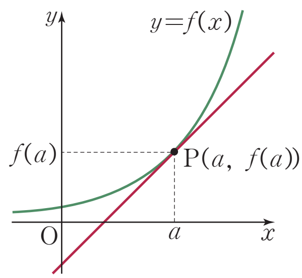
2. **1**을 이용하여 이 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(2, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 P에서의 접선은 점 $(a, f(a))$를 지나고, 기울기가 $f'(a)$인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.



수학 I **직선의 방정식**
점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

예제 01 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2+2x$라고 하면

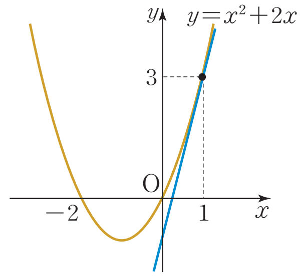
$f'(x)=2x+2$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 4이고, 점 $(1, 3)$을 지나므로

$y-3=4(x-1)$

$y=4x-1$



답 $y=4x-1$

문제 1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2+4x-3$ $(1, 2)$　　(2) $y=-2x^3+4x+3$ $(-1, 1)$

예제 02 곡선 $y=-x^2-2x+1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓고 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=-x^2-2x+1$이라고 하면

$f'(x)=-2x-2$

접점의 좌표를 $(a, -a^2-2a+1)$이라고 하면

접선의 기울기가 2이므로

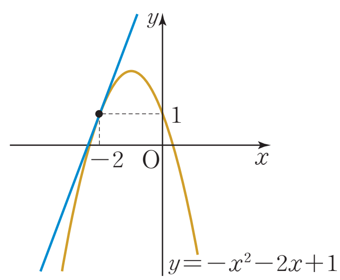
$f'(a)=-2a-2=2$

$a=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 2이고, 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$y-1=2(x+2)$

$y=2x+5$



답 $y=2x+5$

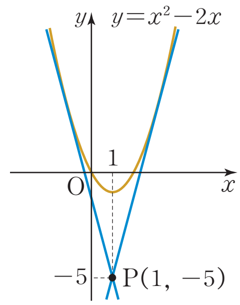
문제 2 다음 곡선에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-5x+2$　　(2) $y=-x^3+2x+2$

문제 3 곡선 $y=x^2-4x+2$에 접하고, 직선 $2x+y+1=0$과 평행한 접선의 방정식을 구하여라.

예제 03

점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서 곡선 $y=x^2-2x$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.



풀이 $f(x)=x^2-2x$라고 하면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a)=(2a-2)(x-a)$ ……①

이 접선이 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$를 지나므로

$-5-(a^2-2a)=(2a-2)(1-a)$

$a^2-2a-3=0$

$a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은 ①에서

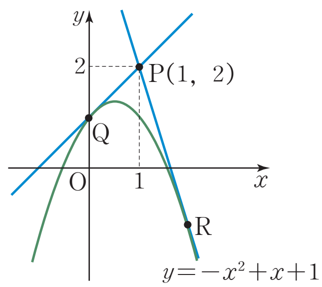
$y=-4x-1$ 또는 $y=4x-9$

답 $y=-4x-1$ 또는 $y=4x-9$

문제 4 다음 주어진 점 P에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-3x+4$　$\mathrm{P}(1,\ 1)$　　(2) $y=x^3+2x$　$\mathrm{P}(0,\ 2)$

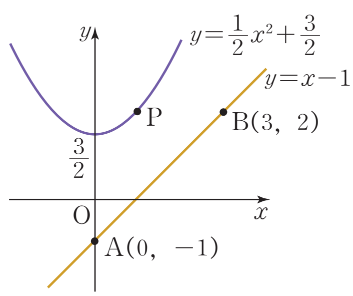
문제 5 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서 곡선 $y=-x^2+x+1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라고 할 때, 선분 QR의 길이를 구하여라.



사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$ 위의 점 P와 직선 $y=x-1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에 대하여 점 P와 직선 $y=x-1$ 사이의 최단 거리를 구하고, 이때의 점 P에서 삼각형 PAB의 넓이를 구하여 보자.



02 평균값 정리

● 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

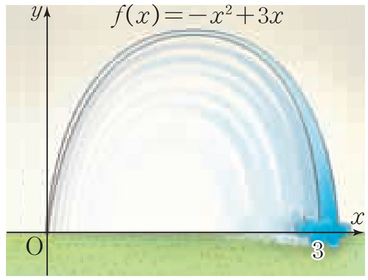
롤의 정리란 무엇인가?

탐구 활동

어느 광장에 오른쪽 그림과 같은 분수대가 설치되어 있다. 이 분수대에서 물을 쏘아 올린 지점을 원점으로 하고, 원점에서 수평으로 x m 떨어진 지점의 물의 높이 $f(x)$ m가

$$f(x)=-x^2+3x$$

라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

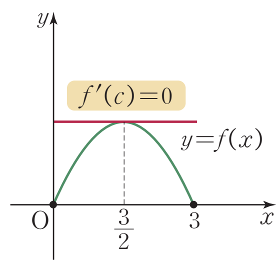


1. $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하여 보자. (단, $a<b$)

2. $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 c의 값이 a와 b 사이에 있는지 확인하여 보자.

함수 $f(x)=-x^2+3x$는 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 3)$에서 미분가능하다.

이때 오른쪽 그림과 같이 $f(0)=f(3)$이고 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$이므로 $f'(c)=0$인 $c=\frac{3}{2}$이 열린 구간 $(0, 3)$에 존재한다.



일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 곡선 $y=f(x)$의 접선이 x축과 평행하게 되는, 즉 $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

이 성질에서 다음의 정리가 성립하며, 이것을 **롤의 정리**라고 한다.

롤의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

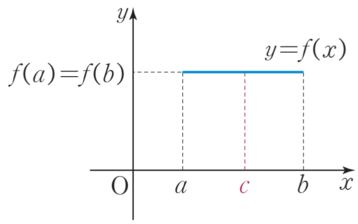
$$f'(c)=0$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

이제 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$가 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가짐을 이용하여 롤의 정리를 증명하여 보자.

(i) 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우

열린 구간 (a, b)에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.



(ii) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

$f(a)=f(b)$이므로 열린 구간 (a, b)에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 가진다.

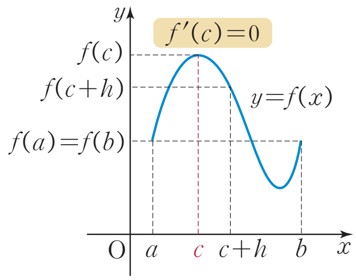
P. 74 **최대 · 최소 정리**
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

① $x=c$에서 최댓값 $f(c)$를 가질 때

절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq 0)$에 대하여 $f(c+h)-f(c)\leq 0$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$



이다. 그런데 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 좌극한과 우극한이 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

② $x=c$에서 최솟값 $f(c)$를 가질 때

최솟값을 가질 때에도 ①과 같은 방법으로 $f'(c)=0$임을 보일 수 있다.

예제 01

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$에 대하여 닫힌 구간 $[0, 6]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

풀이 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$는 닫힌 구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 6)$에서 미분가능하다. 또한 $f(0)=f(6)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(0, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x-3$에서 $f'(c)=c-3=0$, $c=3$

답 3

문제 1

다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^2+4x$ $[1, 3]$

(2) $f(x)=(x-a)(x-b)$ $[a, b]$

평균값 정리란 무엇인가?

함수 $f(x)=x^2$은 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.

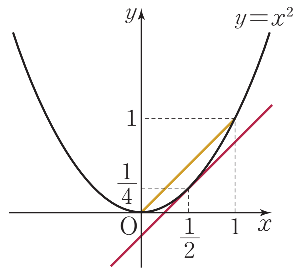
한편 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균 변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$

이다. 이때 $f'(x)=2x$에 대하여 방정식 $2x=1$의 근인 $\frac{1}{2}$은 0과 1 사이에 있다. 따라서

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$

이 성립한다.



이와 같이 롤의 정리에서 $f(a)\neq f(b)$인 경우까지 확장하면 다음 정리가 성립하며, 이것을 **평균값 정리**라고 한다.

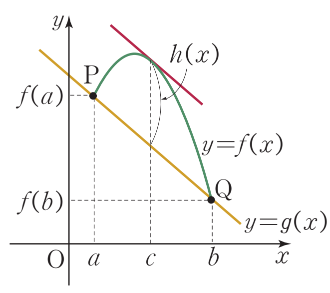
> **평균값 정리**
>
> 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
>
> 인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

이제 평균값 정리를 증명하여 보자.

두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면 기울기가 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고, 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 지나므로

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때 $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$이다.



따라서 롤의 정리에 의하여

$$h'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

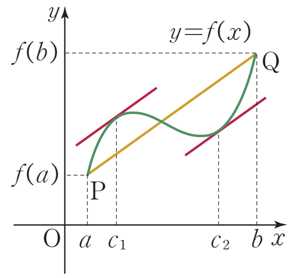
인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

평균값 정리의 의미를 그래프를 통하여 알아보자.

평균값 정리에서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c,\ f(c))$에서의 접선의 기울기이다.



따라서 평균값 정리는 열린 구간 $(a,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 직선 PQ와 평행한 직선이 적어도 하나 존재한다는 것을 뜻한다.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 함수 $f(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 평균변화율이다.

예제 02 함수 $f(x)=x^2+2x+2$에 대하여 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c를 구한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2+2x+2$는 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)\ (-1<c<2)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x+2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c를 구하면

$$\frac{10-1}{2-(-1)}=2c+2,\ c=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

문제 2 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3\ \ [0,\ 3]$

(2) $f(x)=-x^3+x\ \ [0,\ 2]$

상수함수 $f(x)=c$에 대하여 $f'(x)=0$이 성립함을 알고 있다. 이때 평균값 정리를 이용하면 이 명제의 역도 성립함을 알 수 있다.

예제 03

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 열린 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수임을 증명하여라.

증명 $a<x\leq b$인 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, x]$에서 연속이고 열린 구간 (a, x)에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.

그런데 열린 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$$

$$f(x)-f(a)=0$$

$$f(x)=f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

발전

문제 3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 닫힌 구간 $[a, b]$에 속하는 모든 x에 대하여

$$f'(x)=g'(x)\text{이면 } f(x)=g(x)+k\ (k\text{는 상수})$$

임을 증명하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

다음 물음에 답하여 보자.

(1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 5$이고, $f(0)=-3$일 때, $f(2)$의 값이 될 수 있는 가장 큰 값을 말하여 보자.

(2) $f(0)=-1$, $f(2)=4$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 2$를 만족시키는 함수 $f(x)$가 존재하는지 말하여 보자.

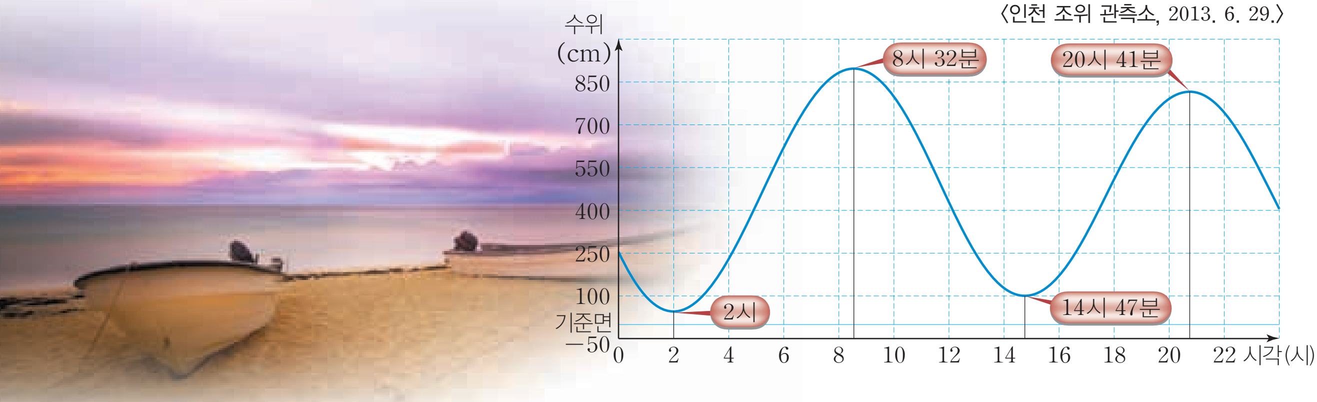
03 함수의 증가와 감소

● 함수의 증가와 감소를 판정하고 설명할 수 있다.

함수의 증가와 감소는 어떻게 알 수 있는가?

탐구 활동 **다음은 2013년 어느 날 인천 조위 관측소에서 측정한 해수면의 높이를 나타낸 그래프이다. 물음에 답하여 보자.**

〈인천 조위 관측소, 2013. 6. 29.〉



1. 해수면의 높이가 증가하는 시간대를 말하여 보자.

2. 해수면의 높이가 감소하는 시간대를 말하여 보자.

위의 그래프에서 곡선이 오른쪽 위로 올라가면 해수면의 높이가 증가하고, 오른쪽 아래로 내려가면 해수면의 높이가 감소함을 알 수 있다.

먼저 함수의 그래프에서 증가와 감소에 대하여 알아보자.

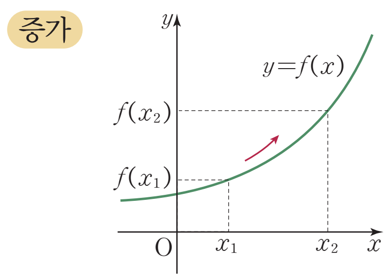
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

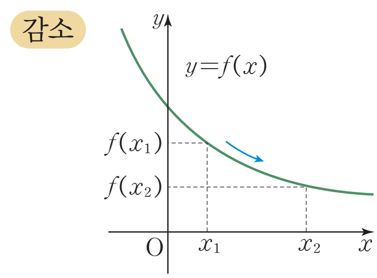
$$x_1 < x_2 \text{일 때,} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다. 또한

$$x_1 < x_2 \text{일 때,} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.





예제 01 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가함을 설명하여라.

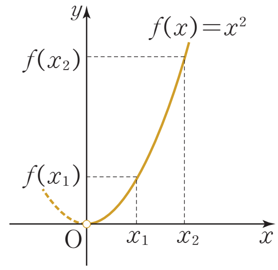
풀이 구간 $(0,\ \infty)$에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$x_1<x_2$일 때

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.



문제 1 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소함을 설명하여라.

이제 어떤 구간에서 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호 사이의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 평균값 정리에 의하여 열린 구간 $(a,\ b)$에 속하고 $x_1<x_2$인 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 $(x_1,\ x_2)$에 존재한다.

$f'(x)$의 부호에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

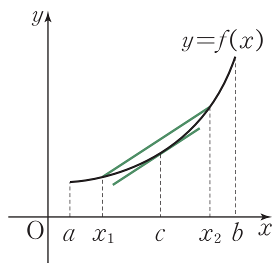
[1] 열린 구간 $(a,\ b)$의 임의의 x에서 $f'(x)>0$이면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0$$

이므로 $f(x_2)-f(x_1)$의 부호와 x_2-x_1의 부호는 일치한다. 즉,

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.



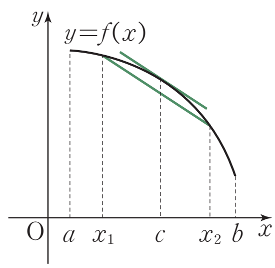
[2] 열린 구간 $(a,\ b)$의 임의의 x에서 $f'(x)<0$이면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)<0$$

이므로 $f(x_2)-f(x_1)$의 부호와 x_2-x_1의 부호는 서로 반대이다. 즉,

$$f(x_2)-f(x_1)<0$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

● 미분가능한 함수 $f(x)$가 증가하면 $f'(x)\geq 0$, 감소하면 $f'(x)\leq 0$

참고 위의 성질의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $x_1<x_2$인 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$$

이므로 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

예제 02

다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=x^3-3x+1$ (2) $f(x)=x^3-3x^2+3x$

● 표에서 ↗는 함수 $f(x)$의 증가를, ↘는 감소를 나타낸다.

풀이 (1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

(2) $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

따라서 $x=1$의 좌우에서 증가하므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

답 (1) 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-1, 1)$에서 감소

(2) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가

문제 2 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2-6x$ (2) $f(x)=-x^3-3x^2+9x$

(3) $f(x)=x^3+6x^2+12x$ (4) $f(x)=x^3-x^2+x+2$

04 함수의 극대와 극소

● 함수의 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

함수의 극대와 극소란 무엇인가?

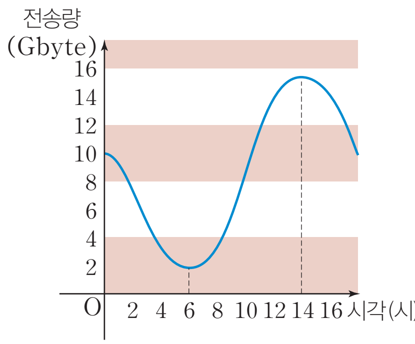
생각 열기

탐구 활동

오른쪽 그림은 어떤 회사에서 사용하는 인터넷 회선의 데이터 전송량을 조사하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

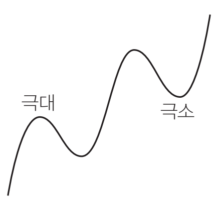
1. 바로 전과 후의 데이터 전송량보다 더 많은 전송량을 나타내는 시각을 말하여 보자.

2. 바로 전과 후의 데이터 전송량보다 더 적은 전송량을 나타내는 시각을 말하여 보자.



● 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면 $f(a)$가 $x=a$의 충분히 가까운 근방에서 최댓값이다.

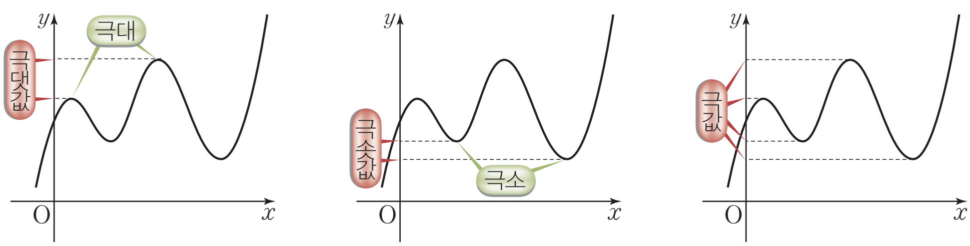
● 극댓값이 반드시 극솟값보다 큰 것은 아니다.



$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

또 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

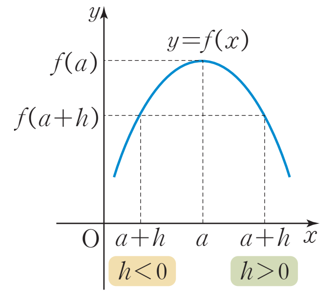
이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



참고 상수함수는 모든 실수에서 극값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖고 a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 함수의 극값을 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지면 충분히 작은 $|h|$에 대하여



$$h>0\text{이면}\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$$

$$h<0\text{이면}\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0$$

이다. 이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$0\le \lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$$

이다.

따라서 $f'(a)=0$이다.

마찬가지 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지는 경우에도 $f'(a)=0$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

극값의 판정

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면

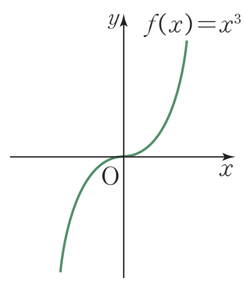
$$f'(a)=0$$

이다.

(미분계수)$=0$이지만 극값을 갖지 않는 경우도 있다.

위의 성질의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

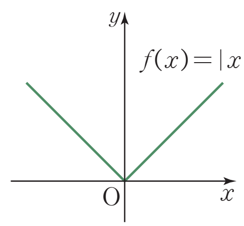
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(0)=0$이지만, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.



미분계수의 존재와 관계없이 극값을 가질 수 있다.

한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖더라도 $f'(a)=0$이 성립하지 않을 수도 있다.

예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 오른쪽 그림과 같이 구간 $(-1,\ 1)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\ge f(0)$이므로 극값의 정의에 의하여 $x=0$에서 함수 $y=|x|$는 극소가 된다. 그러나 $f'(0)$은 존재하지 않는다.



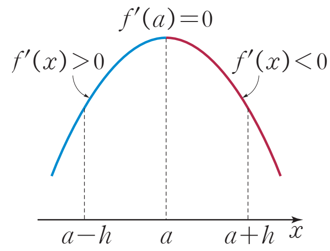
함수 $f(x)$의 극대와 극소를 나타내는 표를 만들면 각각 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$ (극대)	$\searrow$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$ (극소)	$\nearrow$

이제 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 극댓값과 극솟값을 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다고 하자. 이때 충분히 작은 양수 h에 대하여 x의 값이 $a-h$에서 a로 증가할 때 $f(x)$는 증가하고, x의 값이 a에서 $a+h$로 증가할 때 $f(x)$는 감소한다. 즉,



$$a-h<x<a\text{일 때}\quad f(x)\le f(a)$$
$$a<x<a+h\text{일 때}\quad f(a)\ge f(x)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다.

마찬가지 방법으로 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면
$f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면
$f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

예제 01

함수 $f(x)=2x^3-3x^2+3$의 극값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3 (극대)	$\searrow$	2 (극소)	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=3$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=2$이다.

답 극댓값: 3, 극솟값: 2

문제 **1** 다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x$

(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x-1$

예제 02

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지고, $x=2$에서 극솟값을 가진다고 한다. 이때 a, b, c의 값과 극솟값을 각각 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$, $f'(2)=12+4a+b=0$

$a=-3$, $b=0$

또 $x=0$일 때, 극댓값이 0이므로 $f(0)=c=0$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$이므로 극솟값은 $f(2)=-4$

답 $a=-3$, $b=0$, $c=0$, 극솟값: -4

문제 **2** 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$은 $x=1$에서 극댓값 3을 가진다. 이때 a, b의 값과 극솟값을 각각 구하여라.

문제 **3** 함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax+1$이 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

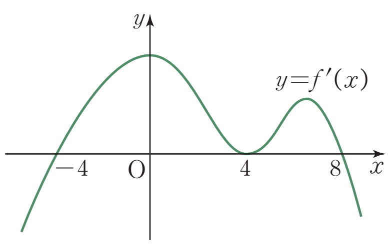
사고력 기르기

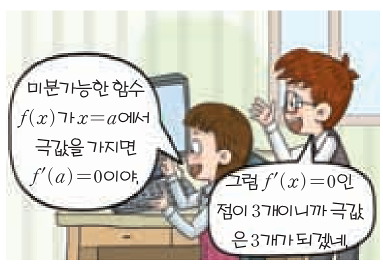
추론

▶ 의사소통

문제 해결

다음 그림은 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. 그래프를 보고 나눈 대화에서 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 그 이유를 말하여 보자.





05 함수의 그래프

● 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

다항함수의 그래프의 개형은 어떻게 그리는가?

생각 열기

탐구 활동 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 보자.

2. 함수 $y=f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하여 보자.

다항함수의 그래프의 개형을 그릴 때, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, y축과의 교점 등을 이용하면 그 개형을 쉽게 그릴 수 있다.

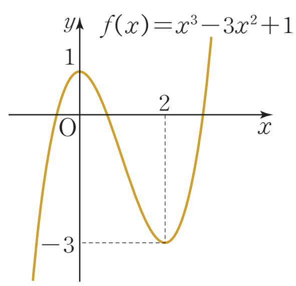
예제 01 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1 (극대)	↘	-3 (극소)	↗



문제 1 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ (2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$

예제 02

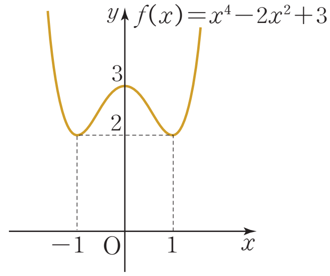
함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2 (극소)	↗	3 (극대)	↘	2 (극소)	↗



문제 2

다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=2x^4-4x^2+1$

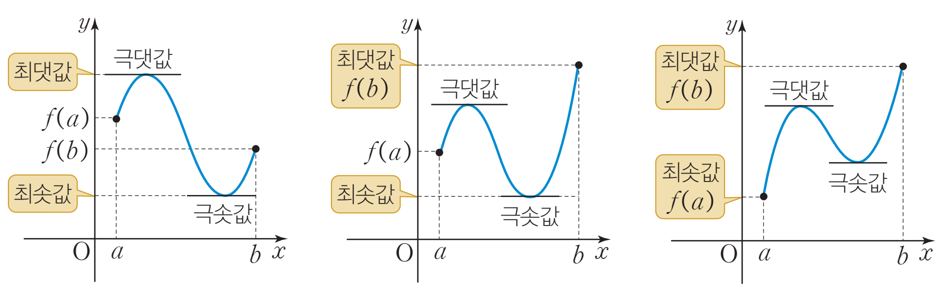
(2) $f(x)=-3x^4+4x^3$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 특히 함수 $f(x)$의 극값과 구간 $[a, b]$에서 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 이용하면 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

즉 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이 최솟값이다.

이때 다음 그림과 같이 극댓값과 극솟값이 반드시 최댓값과 최솟값이 되는 것은 아니다.



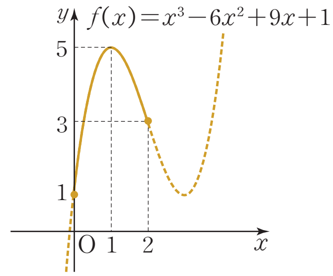
예제 03 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	5 (극대)	$\searrow$	3



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 1을 가진다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

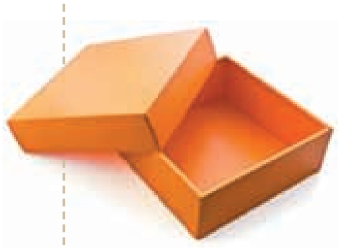
문제 3 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^3+3x^2\ [-1,\ 1]$

(2) $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2+3\ [0,\ 2]$

문제 4 구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+a$의 최솟값이 3일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

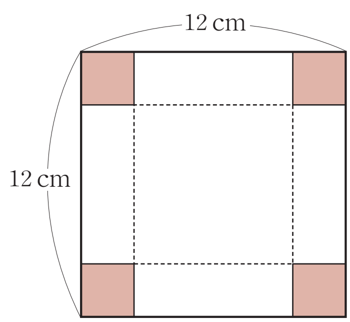
창의 up



한 변의 길이가 12 cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라 내고 나머지 부분을 접어서 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상자의 부피가 최대가 되는 x의 값을 구하여라.

(2) 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.



06 방정식과 부등식에의 활용

● 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

함수의 그래프는 방정식과 부등식에 어떻게 활용되는가?

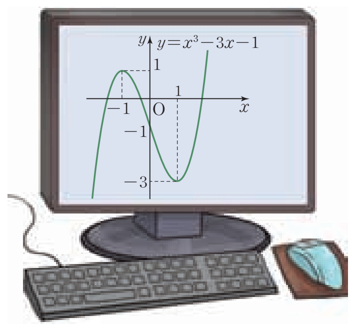
생각 열기

탐구 활동

함수 $y=x^3-3x-1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 곡선 $y=x^3-3x-1$이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하는 방정식을 만들어 보자.

2. 그래프를 이용하여 **1**에서 구한 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.



함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

또 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이와 같이 함수의 그래프를 이용하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.

예제 01

방정식 $x^3-6x^2+9x-1=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

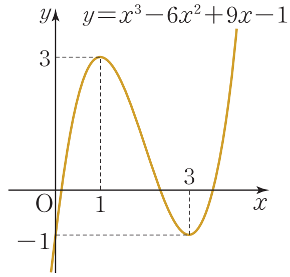
풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만나므로 방정식의 서로 다른 실근은 3개이다.

답 3

문제 1

그래프를 이용하여 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x^2+3x+1=0$　　　(2) $x^4+4x-2=0$

예제 02

방정식 $x^3-3x^2=a$가 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

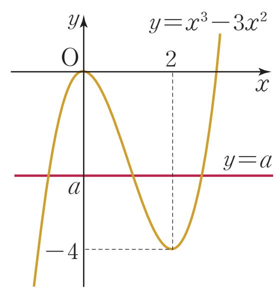
풀이 $f(x)=x^3-3x^2$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$



따라서 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 a값의 범위는 $-4<a<0$이다.

답 $-4<a<0$

문제 2

방정식 $2x^3-6x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

함수의 그래프를 이용하여 부등식을 증명하여 보자.

어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

또 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 증명할 때에는

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 하고 주어진 구간에서 함수 $y=h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

예제 03 $x\geq 0$일 때, $x^3+2>x^2+x$가 성립함을 증명하여라.

● 어떤 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)>0 이면 $f(x)>0$이다.

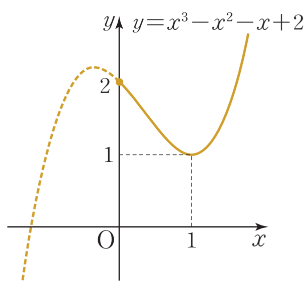
증명 $f(x)=(x^3+2)-(x^2+x)=x^3-x^2-x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1	↗



주어진 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이면서 최소이다. 그런데 최솟값이 $f(1)=1$이므로 $x\geq 0$인 모든 x에 대하여

$f(x)=(x^3+2)-(x^2+x)>0$

$x^3+2>x^2+x$

문제 3 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $x\geq -1$일 때, $x^3>3x^2-5$

(2) 모든 x에 대하여 $3x^4-4x^3+1\geq 0$

문제 4 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^4-4x^2\geq k$가 성립하도록 실수 k값의 범위를 구하여라.

07 속도와 가속도

● 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있다.

도함수는 속도와 가속도에 어떻게 활용되는가?

생각 열기

물 로켓

물 로켓은 물과 공기를 이용하여 날아가도록 하는 로켓이다. 물 로켓은 압축된 공기의 힘으로 물을 뿜어 날아가는데, 페트병에 적당한 양의 물을 넣고 펌프를 이용하여 공기를 불어 넣어 주면 병 안의 공기가 압축되고 마개를 열어 주면 물을 뿜어내는 물의 힘으로 날아가게 된다.

탐구 활동

지면에서 처음 속도 20 m/s로 똑바로 위로 쏘아 올린 물 로켓의 t초 후의 높이를 x m라고 하면 $x=20t-5t^2$이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 쏘아 올린 후 1초에서 $(1+h)$초까지의 평균 속도를 구하여 보자.

2. 쏘아 올린 후 1초일 때의 순간변화율을 구하여 보자.

점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 x라고 하면 x는 t의 함수이므로 $x=f(t)$와 같이 나타낼 수 있다.

시각이 t에서 $t+\varDelta t$까지 변할 때, 점 P의 위치의 변화량 $\varDelta x$는

$$\varDelta x=f(t+\varDelta t)-f(t)$$

이므로 점 P의 평균 속도는 함수 $f(t)$의 평균변화율과 같고, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t}=\frac{f(t+\varDelta t)-f(t)}{\varDelta t}$$

이때 시각 t에서의 함수 $x=f(t)$의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 순간 속도 또는 속도라 하고, 속도 v는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t}=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{f(t+\varDelta t)-f(t)}{\varDelta t}$$
$$=\frac{dx}{dt}$$

또 속도의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라고 한다.

한편 점 P의 속도 v도 t의 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 이때 시각 t에서의 속도 v의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 가속도라 하고, 가속도 a는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

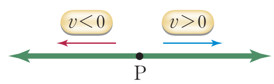
위치
↓ 미분
속도
↓ 미분
가속도

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x=f(t)$라고 하면, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$　　　(2) $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

참고 $v=f'(t)$의 부호는 점 P가 움직이는 방향을 나타낸다. 점 P가 움직이는 방향은 $v>0$일 때 양의 방향이고, $v<0$일 때 음의 방향이다.



예제 01 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-12t$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $t=1$일 때의 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

(2) 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하여라.

풀이 (1) 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t$

따라서 $t=1$일 때의 속도와 가속도는

$v=3\cdot 1^2-12=-9$, $a=6\cdot 1=6$

(2) 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때, $v=0$이므로

$v=3t^2-12=0$에서　$t=2$ $(t>0)$

따라서 $0<t<2$일 때 $v<0$이고, $t>2$일 때 $v>0$이므로 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 것은 출발한 지 2초 후이다.

답 (1) 속도: -9, 가속도: 6　(2) 2초 후

문제 1 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^3+3t^2-2t$일 때, $t=2$일 때의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

예제 02 지면에서 30 m/s의 속도로 야구공을 똑바로 위로 던지면 t초 후의 높이 x m가 $x=30t-5t^2$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 공이 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간과 이때의 높이를 구하여라.

(2) 공이 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구하여라.

풀이 (1) t초 후의 속도를 v라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=30-10t$$

최고 높이에 도달할 때, $v=0$이므로 걸리는 시간은

$v=30-10t=0$에서 $t=3$

이때의 높이는

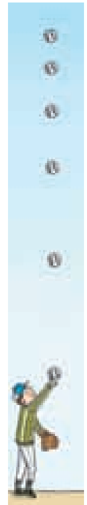
$x=30\cdot3-5\cdot3^2=45(\text{m})$

(2) 물체가 지면에 떨어질 때, $x=0$이므로

$x=30t-5t^2=0$에서 $t=6$ $(t>0)$

이때의 속도는

$v=30-10\cdot6=-30(\text{m/s})$



답 (1) 3초, 45 m (2) -30 m/s

문제 2 직선 궤도 위를 달리는 열차에 제동을 건 후, t초 동안 움직인 거리 x가 $x=26t-0.65t^2$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 제동을 건 후 2초일 때의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

(2) 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 움직인 거리를 각각 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

항공기의 이륙 거리는 여러 가지 요인에 의해 달라지지만, 일반적으로 항공기의 무게, 기후, 활주로의 상태에 따라 다르다.

항공기가 이륙하기 위해 t초 동안 활주로 상을 이동한 거리가 $D=\frac{10}{9}t^2(\text{m})$라고 하자. 비행기의 속도가 200 km/h에 도달하면 활주로 상공으로 이륙하기 시작한다고 할 때, 비행기가 활주로 상에서 이동한 거리를 구하여라. (단, t는 브레이크를 놓는 순간부터 측정한 시간이다.)

중단원 기초

1 곡선 $y=x^2-3x+5$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 곡선 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식

(2) 이 곡선에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식

01 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=x^3+8x$에 대하여 구간 $[0,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

02 평균값 정리

3 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=4x-x^2$ (2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$

03 함수의 증가와 감소

4 다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=-2x^3+6x+1$ (2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$

04 함수의 극대와 극소

5 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=2x^3-6x+2$ (2) $f(x)=3x^4-4x^3+1$

05 함수의 그래프

6 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x-2=0$ (2) $x^3-6x^2-x+14=2-10x$

06 방정식과 부등식에의 활용

7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-t^2$일 때, 시각 $t=2$에서의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

07 속도와 가속도

1 곡선 $y=x^3-3x^2+x-2$ 위의 점 $(1,\ -3)$을 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=|x-2|$에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(1,\ 3)$에 존재하는지 말하여라.

02 평균값 정리

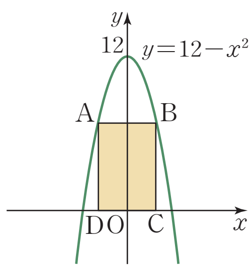
3 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$가 모든 실수에서 증가하기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

03 함수의 증가와 감소

4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -23을 가질 때, 극댓값을 구하여라.

04 함수의 극대와 극소

5 오른쪽 그림과 같이 밑변은 x축 위에, 두 꼭짓점은 곡선 $y=12-x^2$ 위에 있는 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하여라.



05 함수의 그래프
최댓값과 최솟값

6 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

06 방정식과 부등식에의 활용

7 어떤 자동차가 브레이크를 밟은 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라고 하면 $x=18t-0.45t^2$이 성립한다고 하자. 이 자동차가 브레이크를 밟은 후, 정지할 때까지 움직인 거리를 구하여라.

07 속도와 가속도

중단원 실력

[해답 p.206]

수준별 학습

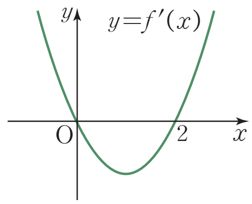
1 곡선 $y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$는 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$를 만족시키는 상수 $\theta\ (0<\theta<1)$의 값을 구하여라. (단, $h>0$)

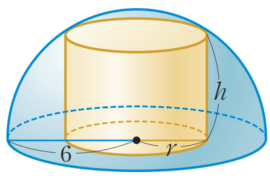
02 평균값 정리

3 오른쪽 그림은 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 극솟값이 6일 때, 극댓값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)



04 함수의 극대와 극소

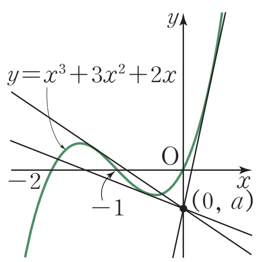
4 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 반구에 직원기둥이 내접하고 있다. 이 직원기둥의 부피의 최댓값을 구하여라.



05 함수의 그래프

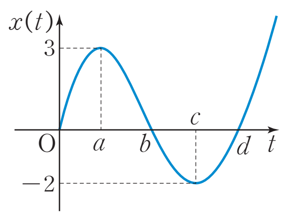
최댓값과 최솟값

5 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+3x^2+2x$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있을 때, 상수 a값의 범위를 구하여라.



06 방정식과 부등식에의 활용

6 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 설명 중에서 옳은 것을 찾아라.



07 속도와 가속도

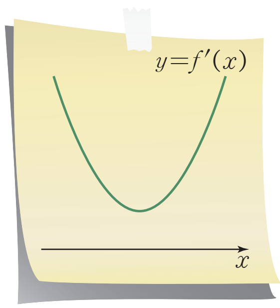
ㄱ. $0<t<d$에서 $t=a$일 때, 점 P의 속도는 최대이다.
ㄴ. $t=b$일 때, 점 P는 움직이는 방향을 바꾼다.
ㄷ. $c<t<d$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

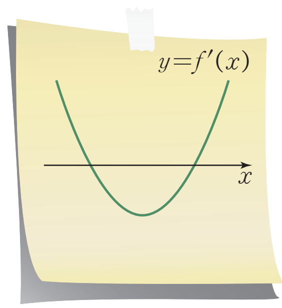
수행 과제

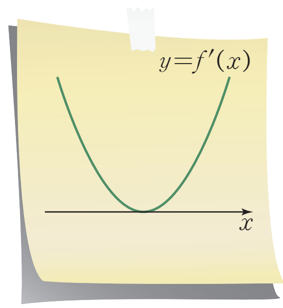
함수 $y=f(x)$의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$의 그래프 사이의 관계

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각할 수 있다.

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a>0)$의 도함수 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$의 그래프는 상수 a, b, c의 값에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다. 다음 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 물음에 답하여 보자.

㉠


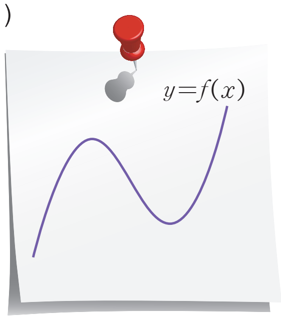
㉡


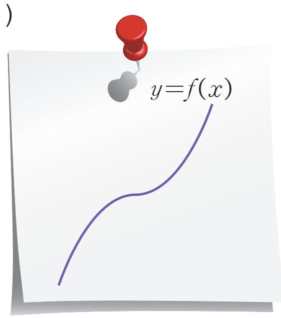
㉢


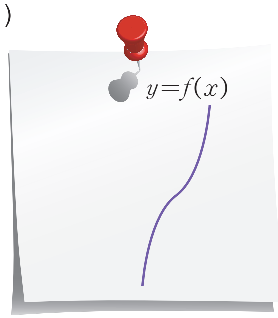
| 과 제 | **1** $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 개수를 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **2** $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 좌우에서 부호 변화를 조사하여 극댓값 또는 극솟값의 개수를 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **3** **1**, **2**를 이용하여 위의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프를 서로 알맞게 짝지어 보자.

(　　)


(　　)


(　　)


대단원 학습 내용 정리

❶ 미분계수

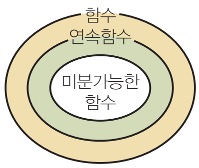
함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

❷ 미분계수의 의미와 연속성

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

(2) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.



❸ 도함수

(1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$이다.
특히 $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$이다.

(3) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때
① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)
② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$
③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$
④ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

❹ 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

❺ 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 되는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

❻ 함수의 증가와 감소

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

❼ 함수의 극대와 극소

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(2) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서
① $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.
② $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

❽ 함수의 그래프, 최댓값과 최솟값

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점을 조사하면 그 개형을 그릴 수 있다.

(2) 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가질 때
① $f(x)$의 최댓값은 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.
② $f(x)$의 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

❾ 방정식과 부등식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

(2) $x>a$에서 $f(x)>0$이 성립함을 증명할 때, $x>a$에서 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크다는 것을 보인다.

❿ 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x=f(t)$라 고 할 때, 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$　　(2) $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

용어와 기호 증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 도함수, 롤의 정리, 평균값 정리, 증가, 감소, 극대, 극댓값, 극소, 극솟값, 극값, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2 함수 $f(x)$에서 $f'(1)=3$일 때,
$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

3 함수 $f(x)=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점 (a, b)에서 접선의 기울기가 5일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 10 ② 6 ③ 2
④ -2 ⑤ -6

4 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<a) \\ 2x+b & (x\ge a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x^2+x)g(x)$이고, $f(1)=4$, $g'(1)=2$일 때, $f'(1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

6 두 곡선 $y=-2x^2-5x$와 $y=ax^3+bx$가 점 $(1, -7)$에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

7 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$이 있다. 열린 구간 $(0, 3)$에 속하는 서로 다른 임의의 두 수 a, b에 대하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$를 만족시키는 실수 k값의 범위는?

① $-3\le k<2$ ② $-3\le k\le 1$
③ $-2\le k<2$ ④ $-1\le k<3$
⑤ $0<k\le 4$

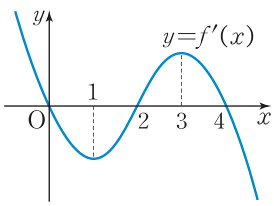
8 함수 $f(x)=x^3+kx^2-8x+4$가 구간 $(-2, 1)$에서 감소하기 위한 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

9 함수 $f(x)=x^3+kx^2-2kx+3$이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

10 다음 그림은 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 구간 $[0, 4]$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값을 가질 때, a의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

11 방정식 $x^3-3x=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k값의 범위는?

① $0<k<2$ ② $0<k<3$
③ $-2<k<0$ ④ $-2<k<2$
⑤ $-3<k<0$

12 지상 25 m의 높이에서 초속 20 m로 똑바로 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 h m라고 하면 $h=25+20t-5t^2$인 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 지점에 도달했을 때, 지면으로부터의 높이는 몇 m인가?

① 30 m ② 35 m ③ 40 m
④ 45 m ⑤ 50 m

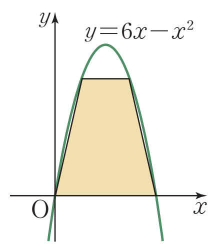
서답형

13 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=4$, $f'(0)=2$, $f'(1)=8$을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

14 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=-x+3$에 접하였다. 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하여라.

|서술형|

15 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=6x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 사다리꼴의 넓이의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서술형|

16 $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^3-3x^2>a$가 항상 성립하도록 하는 실수 a값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ Real Life

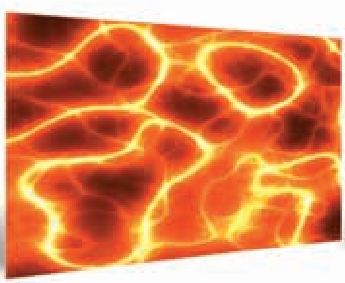
수 학 + 실 생 활

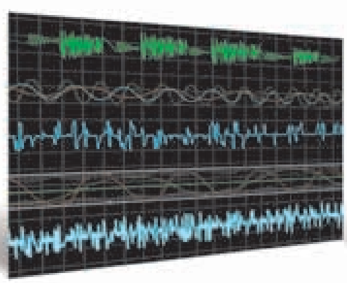
미분은 실생활에서 어떻게 활용되는가?

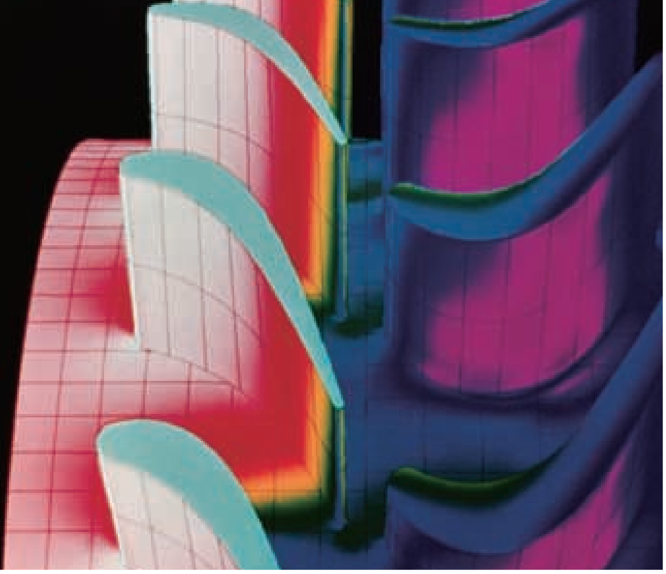
지구 온난화로 인한 기후의 변화, 물가의 변동 상태, 인구의 변화 등 많은 현상들이 시간에 따른 변화의 모습을 띠고 있다. 이러한 변화 속에 내재된 일정한 질서와 패턴들을 연구함으로써 그 흐름을 예측할 수 있다. 물체가 어떻게 운동하는가를 수학적으로 나타내려는 노력 속에서 발명된 미분은 변화하는 대상을 수학적으로 분석하게 해주는 유용한 도구이다.

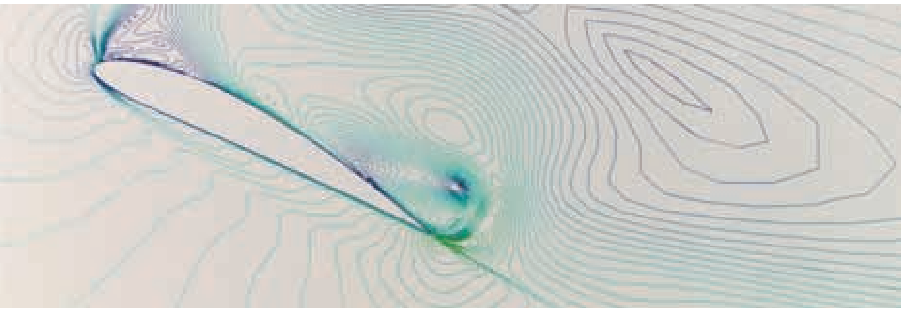
미분은 열역학, 유체역학, 건축학, 전자기학을 비롯한 대부분의 공학 분야와 물리학, 화학, 경제학, 경영학 등 다양한 분야의 학문을 연구하는 중요한 도구가 된다.

예를 들어 열전도 현상, 진동 현상, 바이러스 증식 등에서 일어나는 여러 가지 현상은 미분을 이용하여 설명할 수 있으며 환율, 금리, 주가와 같은 금융 시장의 변동을 분석하고 예측할 때에도 미분이 유용하게 활용된다. 뿐만 아니라 핵물리학에서의 방사성 물질이 붕괴되는 비율의 계산, 화학에서의 물질의 반응율과 압축률, 생물학에서의 혈액의 속도 등을 계산하는 데에도 미분이 유용하게 활용된다. 우리가 매일 접하는 일기 예보에서 핵심적인 역할을 하는 것 역시 미분이다.









배가 잔잔한 호수를 천천히 가로질러 갈 때 배의 뒤편으로 삼각형 모양으로 물결이 퍼져 나가는 것을 볼 수 있다. 또 비행기가 하늘을 날고 있을 때 비행기가 지나간 자리에는 불규칙한 공기의 흐름이 남는다.

배의 몸통 주위를 흐르는 물이나 비행기 날개 주위로 흐르는 공기의 흐름을 설명하는 방정식 중 해결이 어려운 것으로 나비에–스토크스 방정식이 널리 알려져 있다. 그러나 19세기에 만들어진 이 방정식에 대해서 알고 있는 것은 그 활용 범위에 비해 너무나 미미하다. 컴퓨터를 이용하여 특정 형태의 나비에–스토크스 방정식들에 대한 근사적인 해를 구하는 것은 가능하지만 3차원 공간에서 나비에–스토크스 방정식을 만족시키는 함수가 항상 존재하는지 아직까지도 밝혀내지 못하였다.

2000년 미국 매사추세츠 주 케임브리지에 있는 클레이 수학 연구소는 나비에–스토크스 방정식을 7개의 밀레니엄 문제(Millennium Prize Problems) 중의 하나로 지정하고, 이를 해결하거나 반례를 찾아낸 사람에게 미화 백만 달러를 제공하겠다고 발표하였다.

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE

나비에–스토크스 방정식 속에 숨겨진 비밀을 풀기 위한 도전에 동참해 보는 것은 어떨까?

M+ Engineering

수 학 + 공 학

공학적 도구를 활용한 접선의 작도

기하 작도 소프트웨어를 이용하면 함수의 그래프와 그 접선을 쉽게 그릴 수 있다.
곡선 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$ 위의 한 점에서의 접선을 그려 보자.

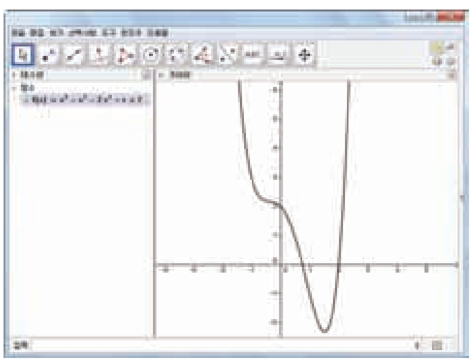
1 \ 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 그래프를 그리고, 접점 A를 선택하여 보자.

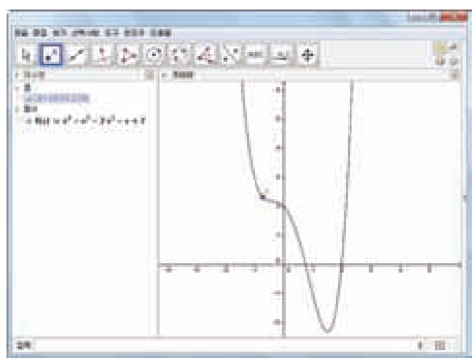
(1) 다음과 같이 명령어 입력 상자에 ‘$f(x)=x\hat{}4-x\hat{}3-2x\hat{}2-x+2$’를 입력하고, Enter키를 누른다.

(2) (1)에서 입력한 함수의 식은 〈그림 1〉과 같이 대수창에 나타나고, 함수의 그래프는 기하창에 나타난다.

(3) 아이콘을 클릭하고, [새로운 점]을 선택한다.

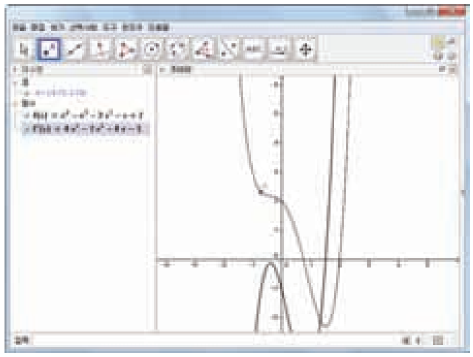
(4) 기하창에서 그래프 위의 한 점을 클릭하면 〈그림 2〉와 같이 기하창에 점 A가 작도되고, 대수창에 점 A의 좌표가 나타난다.


〈그림 1〉


〈그림 2〉

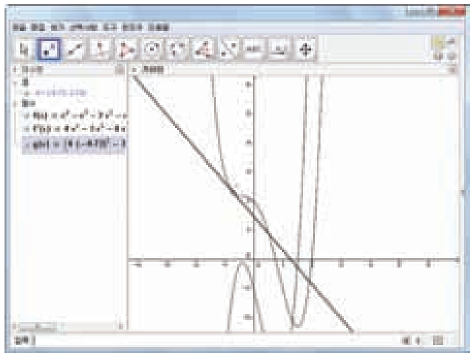
2\ 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 도함수를 구하여 보자.

명령어 입력 상자에 '$f'(x)$=미분[$f(x)$]' 또는 '$f'(x)$=derivative[$f(x)$]'를 입력하고 Enter키를 누르면 오른쪽 그림과 같이 대수창에 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 식이 나타나고, 기하창에 그 그래프가 나타난다.

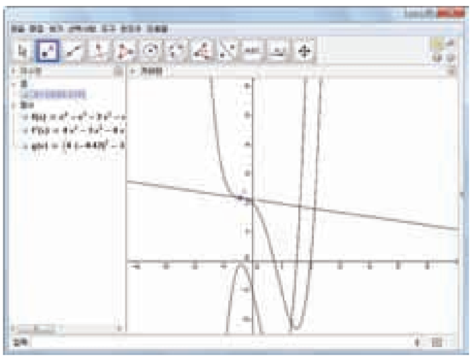


3\ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 그려 보자.

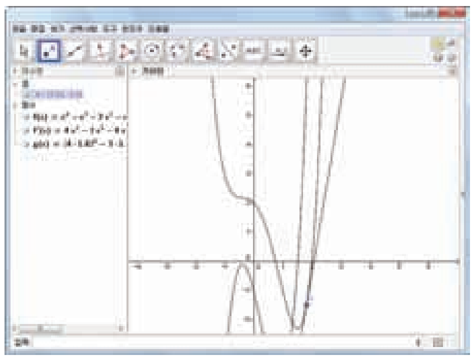
(1) 명령어 입력 상자에 '$g(x)=f'(x(\mathrm{A}))(x-x(\mathrm{A}))+y(\mathrm{A})$'를 입력하고 Enter키를 누르면 오른쪽 그림과 같이 대수창에 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 식 $g(x)$가 나타나고, 기하창에 접선의 그래프가 나타난다.



(2) 기하창의 점 A를 클릭한 채로 그래프를 따라 움직여 보면 〈그림 3〉, 〈그림 4〉와 같이 함수 $f(x)$ 위의 한 점에서 접선의 방정식과 그 그래프를 확인할 수 있다.



〈그림 3〉



〈그림 4〉

| 과 제 | 다음 곡선 위의 점 A에서의 접선을 기하 작도 소프트웨어를 이용하여 그려 보자.

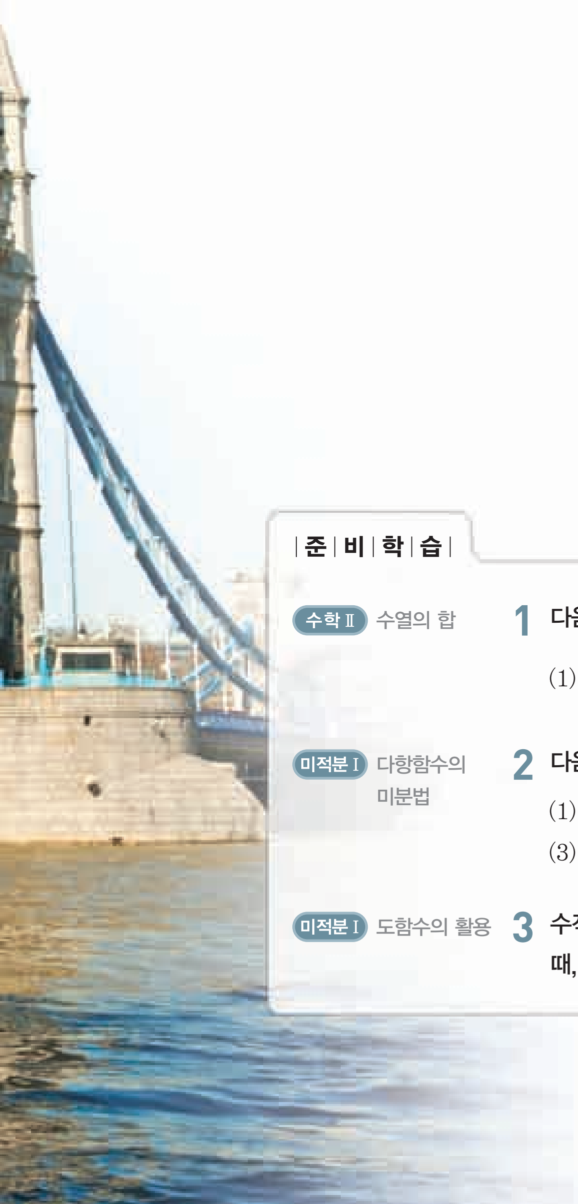
(1) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ $\quad$ $\mathrm{A}(1, -2)$

(2) $f(x)=3x^4-5x^3+2x^2+x-7$ $\quad$ $\mathrm{A}(-1, 2)$

다리 위의 하중을 견디기 위해서는

교각이 받는 힘의 크기를 계산해야 한다.

다항함수의 적분법



| 준 | 비 | 학 | 습 |

수학 Ⅱ 수열의 합

1 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2$

미적분 Ⅰ 다항함수의 미분법

2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=4$　　(2) $y=2x-3$

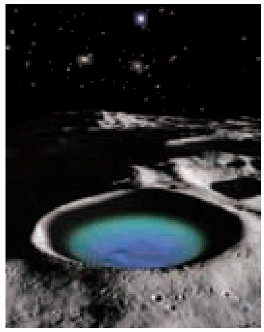
(3) $y=x^2+5x-2$　　(4) $y=x^3-x^2$

미적분 Ⅰ 도함수의 활용

3 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-2t^2+3t-1$로 주어질 때, $t=3$에서의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

1 부정적분과 정적분

달의 분화구에는 얼마나 많은 물이 존재할까?



달에는 과연 물이 존재할까? 오랫동안 지속되어온 이 궁금증에 마침표를 찍게 되었다.

최근 미국의 항공우주국(NASA)은 달에서 물이 발견되었으며, 그것도 다량의 물이 존재한다고 발표하였다. NASA는 달의 남극 지역의 한 분화구에 로켓을 충돌시켜 발생한 물질을 분석한 결과 물이 얼음과 증기 형태로 존재한다는 것을 입증하였다. 특히 이 분화구에서 예상보다 많은 양의 물이 검출되었다고 한다. 그래서 분화구 전체, 더 나아가 달 전체에는 무척 많은 양의 물이 존재할 것이라는 추정이 가능해졌다.

달에서 발견된 물은 식수로 쓸 수 있으며, 로켓 발사에 필요한 연료 제조 등에도 필수적인 물질이다. 이로써 달에 생명체가 존재한다는 추정으로 이어지기는 어렵지만 인류의 우주 기지 건설의 꿈은 현실성을 가지게 되었다.

단원 과제

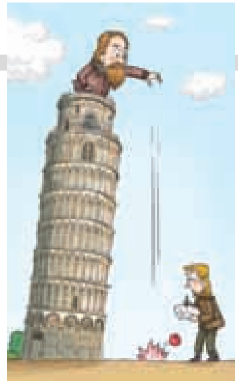
이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 166쪽

분화구에 얼음으로 존재하는 물의 양을 어떻게 구할 수 있을까?

01 부정적분

● 부정적분의 뜻을 안다.
● 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

부정적분이란 무엇인가?



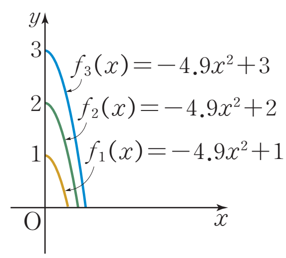
생각 열기

갈릴레이와 자유 낙하의 기본 법칙

이탈리아의 수학자 갈릴레이(Galilei, G. ; 1564～1642)는 '진공 상태에서 낙하하는 물체가 낙하한 거리는 시간의 제곱에 비례한다'는 자유 낙하의 기본 법칙을 발견하였다. 즉, 높이가 C m인 곳에서 공을 놓았을 때, x초 후의 공의 높이 $f(x)$는 $f(x)=-4.9x^2+C$(m)로 나타낼 수 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림은 각각 1 m, 2 m, 3 m인 높이에서 공을 놓았을 때, x초 후 공의 높이 $f_1(x)$ m, $f_2(x)$ m, $f_3(x)$ m를 나타내는 그래프이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 그래프를 나타내는 함수를 각각 미분하여 보자.
2. 도함수가 $-9.8x$인 함수의 식을 추측하여 보자.
3. **2**의 결과로 부터 알 수 있는 것을 말하여 보자.

함수 $f(x)$를 미분하면 도함수 $f'(x)$를 얻는다.

이제 그 역으로 함수 $f(x)$가 주어졌을 때 미분하여 $f(x)$가 되는 함수에 대하여 알아보자.

함수 x^2, x^2+1, x^2+2, $\cdots$를 미분하면

$$(x^2)'=2x,\ (x^2+1)'=2x,\ (x^2+2)'=2x,\ \cdots$$

이므로 함수 x^2, x^2+1, x^2+2, $\cdots$의 도함수는 모두 $2x$이다.

일반적으로 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분**이라고 한다.

● 부정적분(不定積分)을 원시 함수라고도 한다.

따라서 함수 x^2, x^2+1, x^2+2, $\cdots$는 모두 $2x$의 부정적분이다. 여기서 한 함수의 부정적분은 무수히 많다는 것을 알 수 있다.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 또 다른 부정적분을 $G(x)$라고 하면 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라고 하면

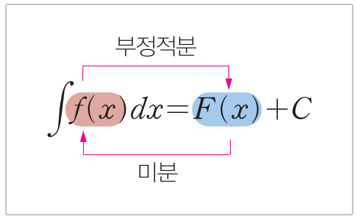
$$G(x)-F(x)=C,\ \text{즉}\ G(x)=F(x)+C$$

이다.

따라서 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 임의의 부정적분은

$$F(x)+C\ (C\text{는 상수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로



$$\boldsymbol{\int f(x)dx}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

이다. 이때 C를 **적분상수**라고 한다.

● 기호 $\int$은 '인티그럴(integral)'이라고 읽는다.

● $\int f(x)dx$에서 $f(x)$를 피적분함수라고 한다.

이와 같이 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **부정적분**
>
> $F'(x)=f(x)$일 때,
>
> $$\int f(x)dx=F(x)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

보기 (1) $(x)'=1$이므로 $\int 1dx=x+C$

(2) $(5x^2)'=10x$이므로 $\int 10xdx=5x^2+C$

● $\int 1dx$는 간단히 $\int dx$와 같이 나타내기도 한다.

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3dx$ (2) $\int 3x^2dx$ (3) $\int 4x^3dx$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx=x^2+3x+C$ (2) $\int f(x)dx=x^3+3x^2-2x+C$

부정적분은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 표는 함수 $F(x)$와 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

$f(x)$	1	x			x^4	$\cdots$	
$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$		$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

1. 위의 표를 완성하여 보자.

2. 완성된 표에는 어떤 규칙성이 있는지 찾아보자.

n이 0 또는 양의 정수일 때 x^n의 부정적분에 대하여 알아보자.

n이 0 또는 양의 정수일 때,

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n\text{이므로}\qquad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$y=x^n$의 부정적분

n이 0 또는 양의 정수일 때,

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$n=0$일 때,
$$\int x^0 dx=\frac{1}{0+1}x^{0+1}+C$$
$$=x+C$$

보기

(1) $\int x dx=\int x^1 dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

(2) $\int x^3 dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{1}{4}x^4+C$

문제 3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^4 dx$ (2) $\int x^7 dx$ (3) $\int x^{10} dx$

발전

문제 4 자연수 m, n에 대하여 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^m \cdot x^n dx$ (2) $\int (x^m)^n dx$

이제 미분법을 역으로 생각하여 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$와 $G(x)$라고 하면

$$F(x)=\int f(x)dx,\ G(x)=\int g(x)dx$$

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$$

이므로 다음을 알 수 있다.

[1] 임의의 실수 k에 대하여 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$\int kf(x)dx=kF(x)$$

이다. 이때 $kF(x)=k\int f(x)dx$이므로

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

가 성립한다.

[2] $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)$$

이다. 이때 $F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

가 성립한다.

[3] $\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)$$

이다. 이때 $F(x)-G(x)=\int f(x)dx-\int g(x)dx$이므로

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부정적분의 성질

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

예제 01 부정적분 $\int(3x^2+2x-5)dx$를 구하여라.

여러 개의 적분상수는 하나로 묶어서 마지막에 적분상수 C 하나로만 나타낸다.

풀이
$$\begin{aligned}\int(3x^2+2x-5)dx&=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int 5dx\\&=3\int x^2dx+2\int xdx-5\int 1dx\\&=3\cdot\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{2}x^2-5\cdot x+C\\&=x^3+x^2-5x+C\end{aligned}$$

답 x^3+x^2-5x+C

문제 5 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(3x^2+2x-1)dx$　　(2) $\int(6x^2-2x-1)dx$

(3) $\int(2x+5)(x-3)dx$　　(4) $\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$

어떤 함수의 도함수와 한 x의 값에 대응하는 함숫값을 알 때, 그 함수를 구하여 보자.

예제 02 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

$$f'(x)=3x^2-2x+1,\ f(0)=3$$

풀이 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$$f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C$$

주어진 조건에서 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^3-x^2+x+3$

답 $f(x)=x^3-x^2+x+3$

문제 6 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f'(x)=x^3-x^2+2,\ f(0)=1$　　(2) $f'(x)=x(2-x),\ f(1)=-2$

02 구분구적법

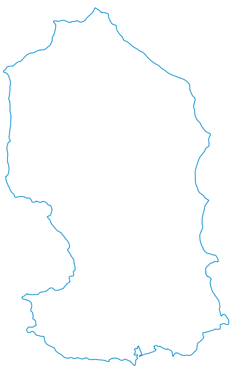
● 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.

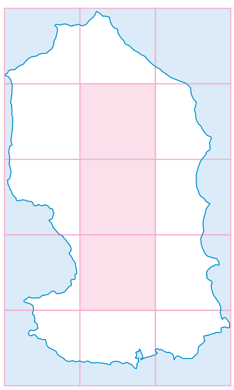
구분구적법이란 무엇인가?

생각 열기

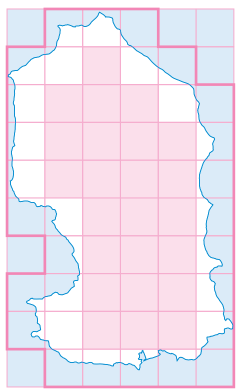
탐구 활동

강화도의 넓이를 구하기 위하여 다음 그림과 같이 강화도의 지도 위에 한 변의 길이가 각각 1 cm, 0.5 cm, 0.25 cm인 정사각형 모눈을 그렸을 때, 물음에 답하여 보자.

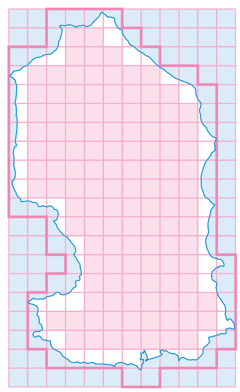




〈그림 1〉



〈그림 2〉



〈그림 3〉

1. 각 그림에서 강화도의 내부에 있는 정사각형의 개수를 a, 강화도의 내부 및 경계선을 포함하는 정사각형의 개수를 b라고 할 때, 표를 완성하여 보자.

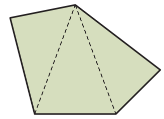
구분	그림 1	그림 2	그림 3
a			120
b			185

2. 각 그림에서 강화도의 내부에 있는 정사각형의 넓이의 합을 m, 강화도의 내부 및 경계선을 포함하는 정사각형의 넓이의 합을 M이라고 할 때, 표를 완성하여 보자.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
m			7.5
M			11.5625
$M-m$			4.0625

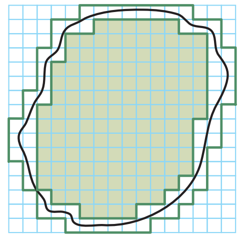
3. 모눈의 한 변의 길이를 0.1 cm, 0.01 cm, $\cdots$와 같이 점점 작게 할 때, $M-m$의 값은 어떻게 변할지 추측하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 다각형의 넓이는 몇 개의 삼각형이나 사각형으로 분할하여 그 분할된 넓이의 합으로 구할 수 있다. 그러나 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 이와 같은 방법으로 구할 수 없다.



이제 곡선으로 둘러싸인 평면도형의 넓이를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S, 곡선의 내부에 있는 정사각형들의 넓이의 합을 m, 곡선의 내부와 곡선의 경계선을 포함하는 정사각형들의 넓이의 합을 M이라고 하면



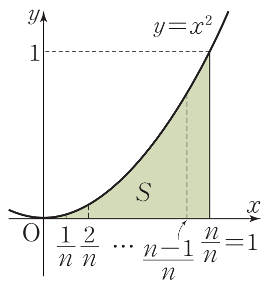
$$m \le S \le M$$

이다. 이때 정사각형의 크기를 한없이 작게 하면 m과 M은 도형의 넓이 S에 가까워지므로, m과 M의 극한을 구하면 이 도형의 넓이를 알 수 있다.

일반적으로 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 몇 개의 기본 도형으로 나누고, 그 기본 도형의 넓이나 부피의 합으로 어림한 값을 구한 뒤에 이 어림한 값의 극한값으로 그 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

예를 들어 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로

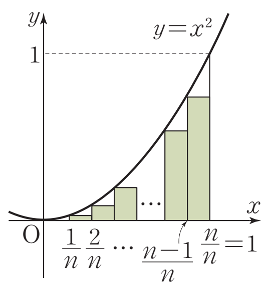


$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)$$

이고, 이에 대응하는 곡선의 y좌표는 각각

$$0, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \cdots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

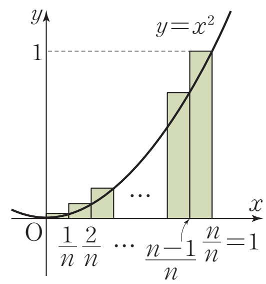
이다. 이때 〈그림 1〉에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면 S_n은 다음과 같다.



〈그림 1〉

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

또 〈그림 2〉에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 T_n이라고 하면 T_n은 다음과 같다.



〈그림 2〉

$$T_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이 S에 대하여 $S_n<S<T_n$이 성립하므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n\le S\le\lim_{n\to\infty}T_n$$

이다.

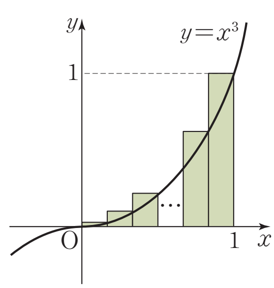
이때

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $S=\frac{1}{3}$이다.

참고 함수 $y=x^2$과 같은 연속함수의 경우에는 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 어느 한쪽의 극한이 존재하면 나머지 한쪽의 극한도 반드시 존재하고, 그 값이 같다는 것이 알려져 있다.
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 하나만 구하면 된다.

문제 1 곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) 구간 $[0, 1]$을 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례로 구하여라.

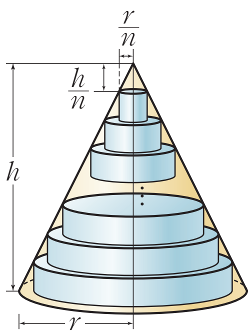
(2) (1)에서 구한 x좌표에 대응하는 곡선의 y좌표를 차례로 구하여라.

(3) 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

(4) 도형의 넓이 S를 구하여라.

이제 구분구적법을 이용하여 입체도형의 부피를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

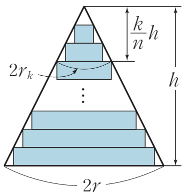
예제 01 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.



풀이 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하여 각 분점을 지나고 밑면과 평행한 평면으로 원뿔을 잘라 각 단면을 밑면으로 하는 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다. 이때 각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$이고 밑면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

이므로 각 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면



$2r : 2r_k = h : \frac{k}{n}h$에서

$r_k = \frac{kr}{n}$

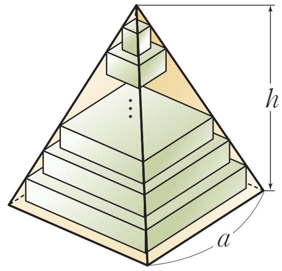
$$\begin{aligned} V_n &= \pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\frac{h}{n} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 도형의 부피 V는

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} V_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2 h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

답 $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$

문제 2 밑면이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고, 높이가 h인 정사각뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.



03 정적분

● 정적분의 뜻을 안다.
● 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

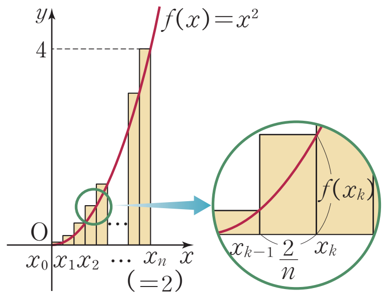
정적분이란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하려고 한다.

$$x_0=0,\ x_1=\frac{2}{n},\ x_2=\frac{4}{n},\ \cdots,\ x_n=\frac{2n}{n}$$

이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



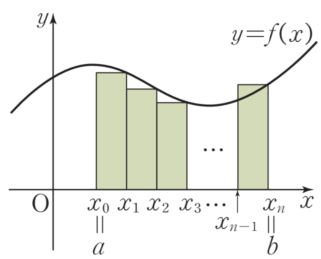
1. n개로 나누어진 직사각형의 가로의 길이를 구하여 보자.
2. 왼쪽에서 k번째에 있는 직사각형의 넓이를 구하여 보자.
3. 세로의 길이가 $f(x_k)\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 가로의 길이가 $\varDelta x$인 n개의 직사각형의 넓이의 합을 식으로 나타내어 보자.

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\ge 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

닫힌 구간 $[a,\ b]$를 n등분하고 양 끝 점을 포함하여 각 분점의 x좌표를 차례로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라고 하면 각 구간의 길이 $\varDelta x$는



$$\varDelta x=\frac{b-a}{n}$$

이다.

● $\varDelta x=x_k-x_{k-1}=\dfrac{b-a}{n}$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

오른쪽 그림의 각 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$S_n=f(x_1)\varDelta x+f(x_2)\varDelta x+\cdots+f(x_n)\varDelta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

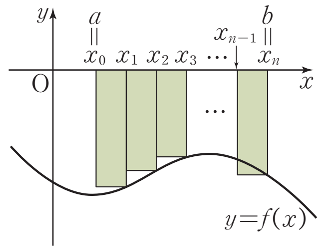
이다.

n이 한없이 커지면 S_n의 극한값은 S와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

한편 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)<0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.

오른쪽 그림의 각 직사각형의 넓이의 합 S_n은



$$\begin{aligned}S_n&=\{-f(x_1)\}\Delta x+\{-f(x_2)\Delta x\}\\&\quad+\cdots+\{-f(x_n)\}\Delta x\\&=-\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\end{aligned}$$

이다. n이 한없이 커지면 S_n의 극한값은 S와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$가 반드시 존재한다.

이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

또 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● 정적분 $\int_a^b f(x)dx$에 대하여 구간 $[a, b]$를 적분 구간, $f(x)$를 피적분함수, x를 적분 변수, a, b를 각각 정적분의 아래끝, 위끝이라고 한다.

정적분의 정의

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

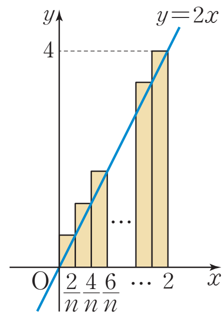
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\left(\text{단, }\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

정적분의 정의에서 정적분의 값은 함수 $f(x)$와 구간 $[a, b]$에 의하여 결정되므로 변수를 x 대신에 다른 문자를 사용하여 나타내어도 그 값은 변하지 않는다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy$$

가 성립한다.

예제 01 정적분의 정의에 따라 $\int_0^2 2x\,dx$의 값을 구하여라.



풀이 $f(x)=2x$라고 하면

함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이다.

정적분의 정의에서 $a=0$, $b=2$라고 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{2k}{n}$$

$$f(x_k)=2x_k=\frac{4k}{n} \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 2x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=4$$

답 4

문제 1 정적분의 정의에 따라 다음 값을 구하여라.

(1) $\int_0^2 3x\,dx$　　(2) $\int_0^3 x^2\,dx$

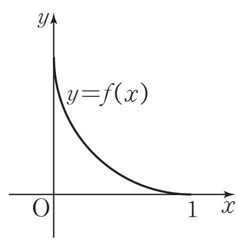
(3) $\int_0^2 (-x^2)\,dx$　　(4) $\int_0^1 (-x^3)\,dx$

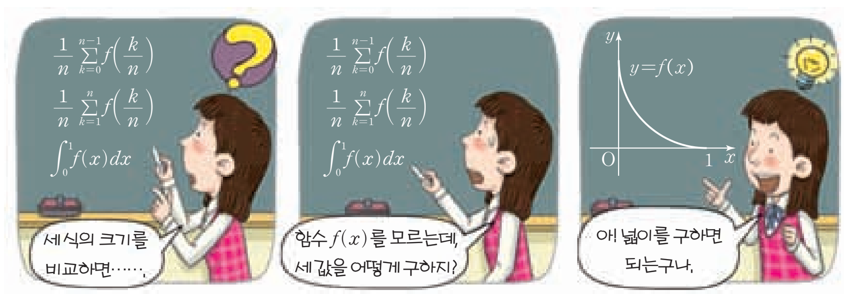
사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 다음 세 값의 대소 관계를 설명하여 보자.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad \int_0^1 f(x)\,dx$$



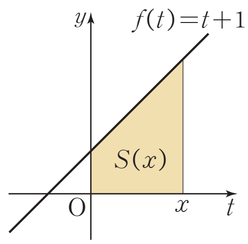


미적분의 기본 정리란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(t)=t+1$과 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



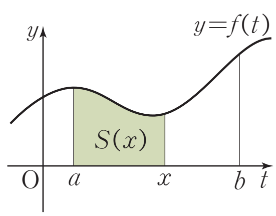
1. 사다리꼴의 넓이 $S(x)$를 x에 관한 식으로 나타내고, $S'(x)$를 구하여 보자.

2. 정적분 기호를 이용하여 $S(x)$를 나타내어 보자.

3. $S'(x)$와 $f(x)$를 비교하여 보자.

정적분과 미분의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$이라고 하자. 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a, b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 이때 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

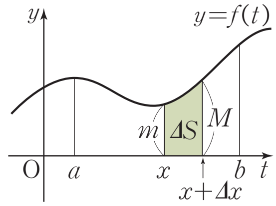
이다.

한편 구간 $[x,\ x+\varDelta x]$ 또는 구간 $[x+\varDelta x,\ x]$에서 함수 $y=f(t)$는 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다.

$\varDelta x>0$일 때, 구간 $[x,\ x+\varDelta x]$에서 $y=f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면

$$m\cdot\varDelta x\le\varDelta S\le M\cdot\varDelta x \qquad \cdots\cdots ②$$

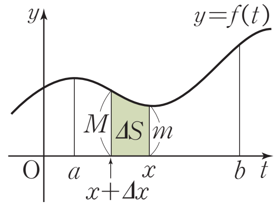
이다.



$\varDelta x<0$일 때, 구간 $[x+\varDelta x,\ x]$에서 $y=f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면

$$M\cdot\varDelta x\le\varDelta S\le m\cdot\varDelta x \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.



부등식 ②와 ③의 각 변을 $\varDelta x$로 나누면 $\varDelta x$의 부호에 관계없이

$$m\le\frac{\varDelta S}{\varDelta x}\le M$$

이 성립한다. 이때 $\varDelta x \longrightarrow 0$이면

$$\lim_{\varDelta x\to0}m\le\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\varDelta S}{\varDelta x}\le\lim_{\varDelta x\to0}M$$

이다.

그런데 함수 $y=f(t)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $\varDelta x \longrightarrow 0$이면 $m \longrightarrow f(x)$이고 $M \longrightarrow f(x)$이다.

따라서 $f(x)\le\lim\limits_{\varDelta x\to0}\dfrac{\varDelta S}{\varDelta x}\le f(x)$, 즉 $f(x)\le\dfrac{d}{dx}S(x)\le f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

이다. 즉, ①로부터

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\ \text{(단, } a<x<b\text{)}$$

보기 $\frac{d}{dx}\int_{7}^{x}(t^2+3t+2)dt=x^2+3x+2$

문제 **2** 다음을 구하여라.

(1) $\frac{d}{dx}\int_{5}^{x}(3y^2-8y+9)dy$ (2) $\frac{d}{dx}\int_{-3}^{x}(3t-2)(t+8)dt$

이제 정적분과 미분의 관계를 이용하여 부정적분과 정적분 사이의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$S(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$$

라고 하면 $S'(x)=f(x)$이므로 $S(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이다.

함수 $f(x)$의 또 다른 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$S(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt=F(x)+C \text{ (}C\text{는 적분상수)} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. $S(x)$의 정의에 의하여 $x=a$이면 $S(a)=0$이므로 ①에서 $x=a$를 대입하면

$$S(a)=F(a)+C=0 \quad \text{즉, } C=-F(a)$$

이다. 이것을 ①에 대입하면

$$S(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt=F(x)-F(a)$$

를 얻고, 이 등식에 $x=b$를 대입하고 변수 t를 x로 바꾸면

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-F(a)$$

이다. 여기서 $F(b)-F(a)$를 기호로

$$\Big[\,F(x)\,\Big]_{a}^{b}$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 **미적분의 기본 정리**라고 한다.

미적분의 기본 정리

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

예제 02 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{2}(4x+3)dx$ (2) $\int_{-1}^{3} 3x^2dx$

풀이 (1) $\int(4x+3)dx=2x^2+3x+C$이므로

$$\int_{1}^{2}(4x+3)dx=\Big[2x^2+3x\Big]_{1}^{2}=14-5=9$$

(2) $\int 3x^2dx=x^3+C$이므로

$$\int_{-1}^{3} 3x^2dx=\Big[x^3\Big]_{-1}^{3}=3^3-(-1)^3=28$$

답 (1) 9 (2) 28

문제 3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{3}dx$ (2) $\int_{-1}^{2} (2x-6)dx$

(3) $\int_{-2}^{3} (3x^2-2x)dx$ (4) $\int_{0}^{1}(4x^3+3x^2)dx$

한편 $a=b$, $a>b$일 때에는 $\int_{a}^{b}f(x)dx$를 다음과 같이 정의한다.

$$\int_{a}^{a}f(x)dx=0,\ \int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$$

이 정의에 의하여 $a>b$이고 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$일 때,

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx=-\Big[F(x)\Big]_{b}^{a}=\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$$

이다.

따라서 미적분의 기본 정리는 적분 구간 $[a, b]$에 관계없이 항상 성립한다.

예제 03 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{2}^{-1}3x^2dx$ (2) $\int_{1}^{0}(1+4x)dx$

풀이 (1) $\int_{2}^{-1}3x^2dx=\Big[x^3\Big]_{2}^{-1}=(-1)^3-2^3=-9$

(2) $\int_{1}^{0}(1+4x)dx=-\int_{0}^{1}(1+4x)dx=-\Big[x+2x^2\Big]_{0}^{1}=-(3-0)=-3$

답 (1) -9 (2) -3

문제 4 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{2}^{-2} dx$　　(2) $\int_{2}^{0}(-4x+2)dx$　　(3) $\int_{1}^{-2}(3x^2+2x)dx$

예제 04 임의의 실수 x에 대하여 등식 $\int_{a}^{x} f(t)dt=x^2-2x-3$을 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-2$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면 $\int_{a}^{a} f(t)dt=0$이므로 $(a+1)(a-3)=0$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$

답 $f(x)=2x-2$, $a=-1$ 또는 $a=3$

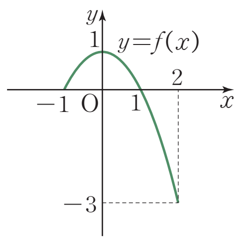
문제 5 임의의 실수 x에 대하여 등식 $\int_{1}^{x} f(t)dt=4x^2-5x+a$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하여라.

발전

문제 6 구간 $[-1, 2]$에서 정의된 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이때 함수

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

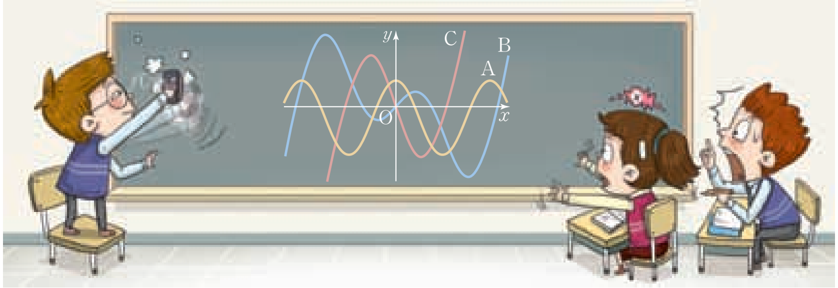
의 최댓값을 구하여라.



사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

다음 그림은 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 그래프를 나타낸 것이다. 각각의 그래프가 어느 함수의 그래프인지 말하여 보자.

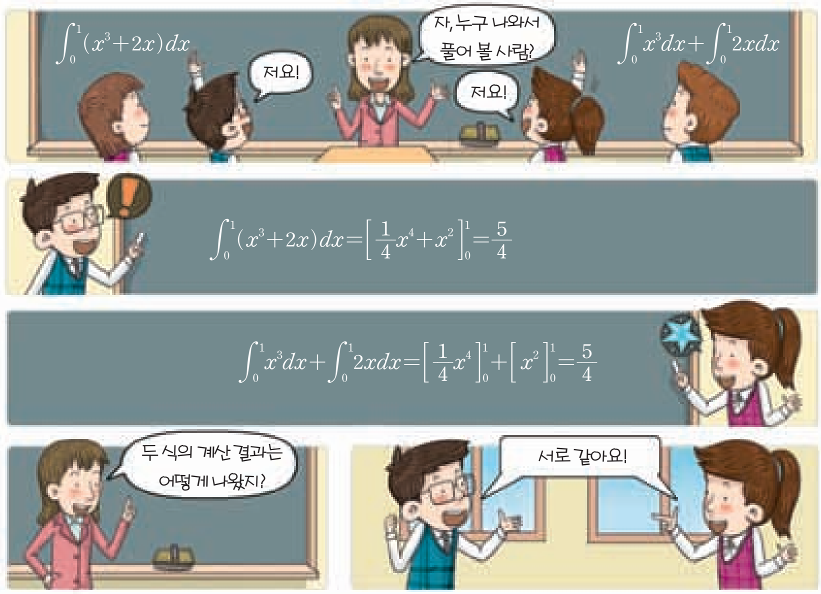


04 정적분의 계산

● 실수배, 합, 차로 표현된 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

정적분의 계산은 어떻게 하는가?

생각 열기



탐구 활동 위와 같은 방법으로 두 함수 $f(x)=x^3$, $g(x)=2x$에 대하여 다음의 값을 비교하여 보자.

1. $2\int_0^1 f(x)dx$와 $\int_0^1 2f(x)dx$

2. $\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx$와 $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx$

3. $\int_0^2 f(x)dx$와 $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

탐구 활동 **1**에서 $2\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{2}$이고, $\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$이므로

$$2\int_0^1 x^3dx=\int_0^1 2x^3dx$$

임을 알 수 있다. 마찬가지로 탐구 활동 **2**, **3**에서 두 정적분의 결과도 각각 같음을 알 수 있다. 이와 같은 성질이 정적분에서 일반적으로 성립함을 알아보자.

먼저 부정적분의 성질과 미적분의 기본 정리를 이용하여 함수의 실수배, 합, 차의 정적분에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면 임의의 실수 k에 대하여

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x)+C$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx &= \Big[\,kF(x)\,\Big]_a^b = kF(b)-kF(a) = k\{F(b)-F(a)\}\\ &= k\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

가 성립한다. 또

$$\begin{aligned}\int \{f(x)+g(x)\}dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx\\ &= F(x)+G(x)+C\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx &= \Big[\,F(x)+G(x)\,\Big]_a^b\\ &= \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}\\ &= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

가 성립한다.

같은 방법으로

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 성질 [1]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 실수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

예제 01 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2+4x+2)dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(x-1)^2dx$

풀이 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2+4x+2)dx=6\int_{-1}^{1}x^2dx+4\int_{-1}^{1}xdx+2\int_{-1}^{1}dx$

$$=6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}+4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}+2\left[x\right]_{-1}^{1}$$

$$=4+0+4=8$$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=\int_{0}^{1}\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$$=\int_{0}^{1}4x\,dx=4\int_{0}^{1}x\,dx$$

$$=4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=2$$

답 (1) 8 (2) 2

문제 1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{1}^{2}(x^2-x+3)dx$ (2) $\displaystyle\int_{1}^{2}x^5dx+\int_{1}^{2}(3-x^5)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx$ (4) $\displaystyle\int_{1}^{2}(x-1)(x+1)dx-\int_{1}^{2}3x^2dx$

이제 분할된 구간에서의 정적분에 대하여 알아보자.

임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

이므로

$$\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{a}^{c}+\Big[F(x)\Big]_{c}^{b}$$

$$=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$

$$=F(b)-F(a)$$

$$=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 성질 [2]

임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

보기 $\int_1^2(x^2-5x)dx+\int_2^3(x^2-5x)dx=\int_1^3(x^2-5x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2\right]_1^3=-\frac{34}{3}$

문제 2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1(3x^2-2x)dx+\int_1^2(3x^2-2x)dx$

(2) $\int_{-1}^2(2x-x^3)dx-\int_3^2(2x-x^3)dx$

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

예제 02 정적분 $\int_0^2|x-1|dx$를 구하여라.

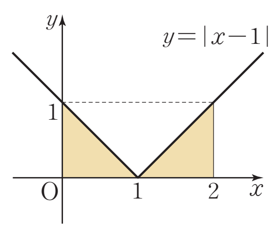
절댓값이 있는 정적분의 경우 구간을 나누어 계산한다.

풀이 $f(x)=|x-1|$이라고 하면

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

따라서 구하는 정적분은

$$\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$



답 1

문제 3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^2|2x-1|dx$

(2) $\int_{-2}^3|x^2-x|dx$

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 급수의 합을 정적분으로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

이므로 정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있다.

예제 03 정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$을 구하여라.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면 $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$

따라서 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

문제 4 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

단원 과제

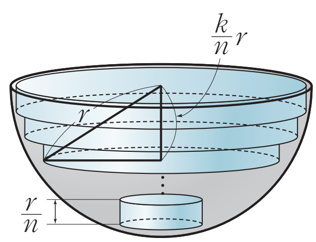
앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

반지름의 길이가 r인 반구 모양의 분화구에 가득찬 얼음의 부피를 다음 순서대로 구하여라.

(1) 높이가 $\frac{r}{n}$인 원기둥을 $(n-1)$개 내접시킬 때, 위에서 k번째 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하여라.

(2) k번째 원기둥의 부피를 구하여라.

(3) 반구의 부피를 정적분의 정의를 이용하여 구하여라.



[해답 p.210]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 상수)

01 부정적분

(1) $\int f(x)dx=3x^2+7x+C$　　(2) $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}x^3+2x+C$

2 다음 부정적분을 구하여라.

01 부정적분
부정적분의 성질

(1) $\int x^5dx$　　(2) $\int (4x+5)dx$

(3) $\int (3x^2-2x+5)dx$　　(4) $\int \frac{x^3}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx$

3 정적분의 정의에 의하여 다음 값을 구하여라.

03 정적분
정적분의 정의

(1) $\int_0^1 x\,dx$　　(2) $\int_0^2 x^3dx$

4 다음을 x에 대하여 미분하여라.

03 정적분
정적분과 미분의 관계

(1) $\int_0^x (2t^3+4)dt$　　(2) $\int_1^x (t-1)^3dt$

5 다음 정적분을 구하여라.

04 정적분의 계산
정적분의 성질

(1) $\int_0^1 (x^3-2x^2+4)dx$

(2) $\int_1^2 (x-1)(x^2+x+1)dx$

(3) $\int_{-1}^1 (x^2-x+1)dx+\int_{-1}^1 (x^2+x-1)dx$

(4) $\int_{-1}^2 (3x^2+2x-4)dx+\int_2^3 (3x^2+2x-4)dx$

중단원 기본

1 점 $(1, 3)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x+1$일 때, $f(x)$를 구하여라.

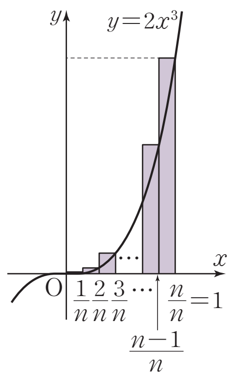
01 부정적분

2 다음은 곡선 $y=2x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 식을 써넣어라.

02 구분구적법

구간 $[0, 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$이므로 오른쪽 그림의 직사각형 넓이의 합을 S_n이라고 하면 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\boxed{}=\frac{1}{2}$$



3 $f(x)=x^3-2x+5$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

03 정적분

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$$

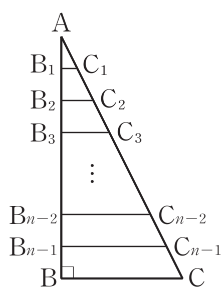
4 다음 정적분을 구하여라.

04 정적분의 계산
정적분의 성질

(1) $\int_{-2}^{1}|x+1|\,dx$ (2) $\int_{-1}^{3}|x^2-2x|\,dx$

(3) $\int_{-3}^{0}(x^2-5x)\,dx-\int_{3}^{0}(x^2-5x)\,dx$ (4) $\int_{0}^{2}\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{2}^{0}\frac{1}{y-1}\,dy$

5 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 오른쪽 그림과 같이 변 AB를 n등분한 점을 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{n-1}$이라 하고, 각 점에서 선분 BC에 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^3$의 값을 구하여라.



04 정적분의 계산
정적분과 급수의 관계

중단원 실력

[해답 p.210]

수준별 학습

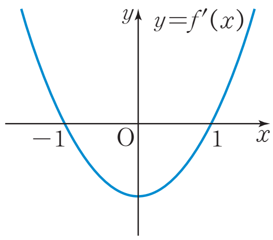
1 함수 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+1$에 대하여

$$F(x)=\int \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}\right]dx$$

이고 $F(0)=3$일 때, $F(2)$의 값을 구하여라.

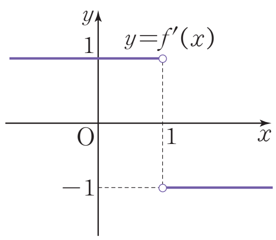
01 부정적분

2 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 이차함수이고, $f(x)$의 극댓값이 6, 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.



01 부정적분
부정적분의 성질

3 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, 등식 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$이 성립할 때, $\int_0^3 f(x)dx$의 값을 구하여라.



03 정적분
미적분의 기본 정리

4 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 할 때,

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

이 성립함을 증명하여라.

04 정적분의 계산
정적분의 성질

5 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_k^{k+1} f(x)dx=k^2$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_1^n f(x)dx$의 값을 구하여라. (단, n은 자연수이다.)

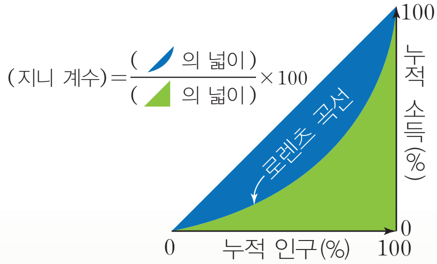
04 정적분의 계산
정적분과 급수의 관계

2 정적분의 활용

국민의 소득 분배를 측정하다.

로렌츠 곡선은 무엇일까?

한 나라의 국민들의 소득 분배 정도를 나타내는 곡선으로 가로축에 소득이 낮은 인구에서 높은 순으로 누적하고, 그에 대응하는 누적 소득을 세로축에 나타낸 곡선이다. 이 곡선이 대각선에 가까울수록 소득 분배가 균등하다고 할 수 있다.

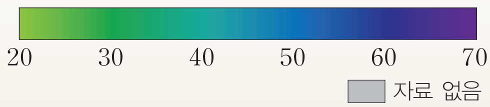


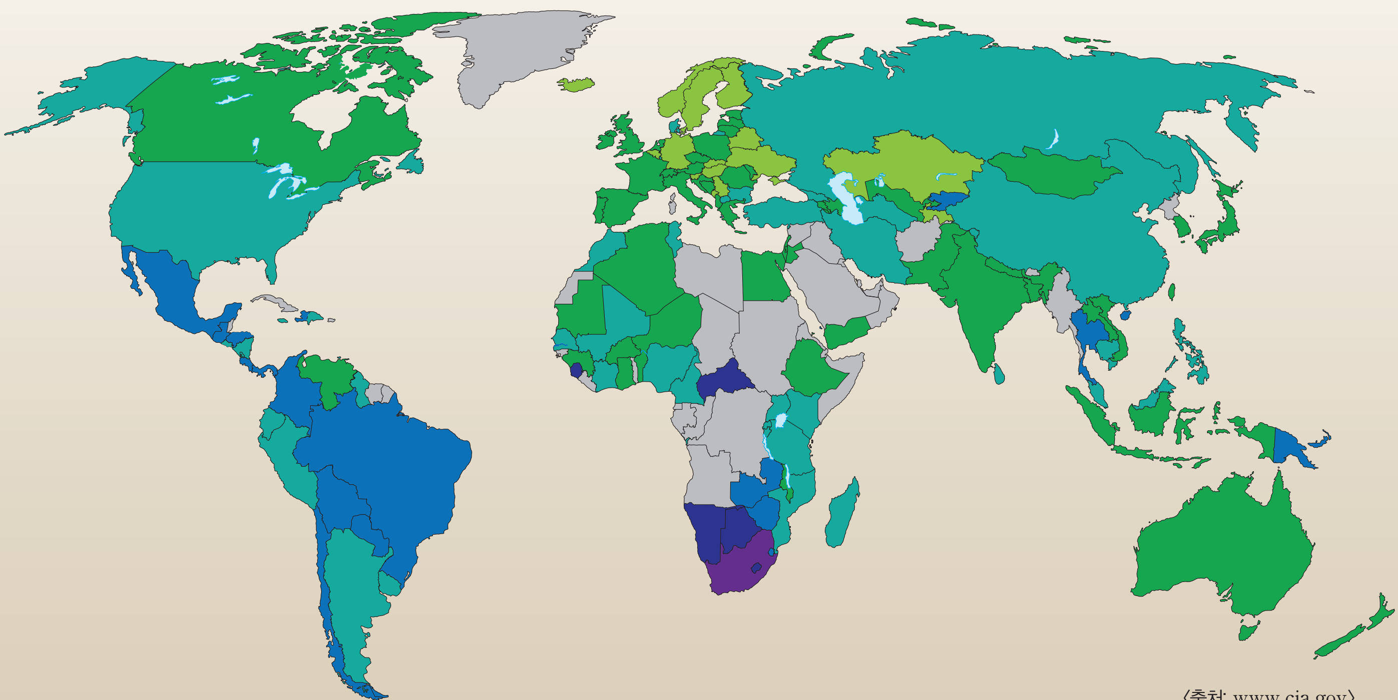
어떻게 활용될까?

로렌츠 곡선과 대각선 사이의 넓이를 삼각형의 넓이로 나누어 수치화한 것을 지니 계수라고 한다. 경제학자들은 이 수치로 국가별 소득의 분배 상태를 비교하는데 활용한다.

무엇을 알 수 있을까?

지니 계수가 커질수록 한 나라의 부자인 인구와 가난한 인구 사이의 소득 격차가 커진다.





〈출처: www.cia.gov〉

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

175쪽

로렌츠 곡선을 이용하여 지니 계수를 구할 수 있을까?

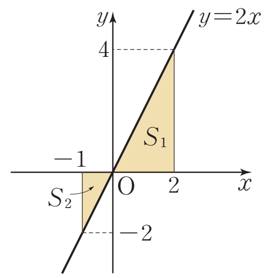
01 넓이

● 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

곡선과 x축 사이의 넓이는 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 직선 $y=2x$와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 넓이 S_1을 구하고, $\int_0^2 2x\,dx$의 값과 비교하여 보자.

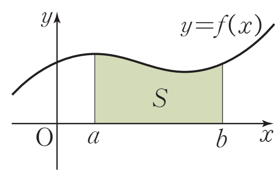
2. 넓이 S_2를 구하고, $\int_{-1}^0 2x\,dx$의 값과 비교하여 보자.

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

넓이 S는 정적분의 정의에 의하여

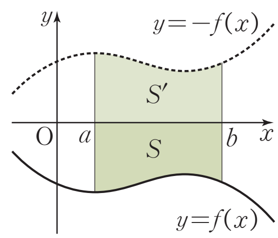
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



(ii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

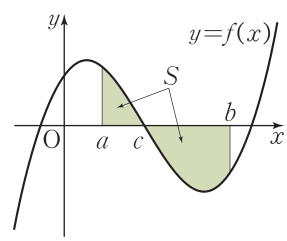
넓이 S는 곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 곡선 $y=-f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



(iii) 구간 $[a, c]$에서 $f(x)\geq 0$이고, 구간 $[c, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

$$\begin{aligned} S&=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx \\ &=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_c^b |f(x)|\,dx \\ &=\int_a^b |f(x)|\,dx \end{aligned}$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

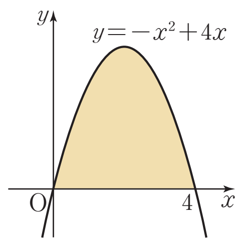
예제 01 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=-x^2+4x$, x축

(2) $y=x^2-4x$, x축, $x=-1$, $x=2$

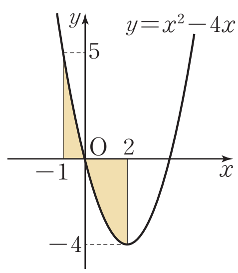
풀이 (1) 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 4]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^4 (-x^2+4x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$



(2) 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1, 0]$에서 $y\geq 0$이고, 구간 $[0, 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0 (x^2-4x)dx+\int_0^2 (-x^2+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{23}{3}$$



답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{23}{3}$

문제 1 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=(x+1)(x-2)$ (2) $y=x^3-x^2-2x$

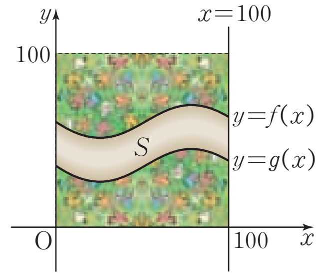
문제 2 다음 곡선과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x$ (2) $y=x^3-3x^2+2x$

두 곡선 사이의 넓이는 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 한 변의 길이가 100 m인 정사각형 모양의 공원을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 공원 안에 있는 산책로의 경계선을 나타내는 식을 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 산책로의 넓이를 S라고 할 때, S를 구하는 방법을 말하여 보자.

2. 산책로의 넓이 S를 정적분을 이용하여 나타내어 보자.

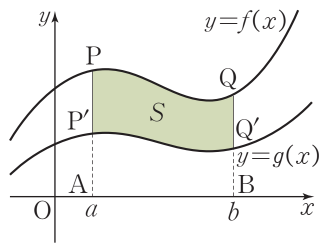
이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$일 때

넓이 S는 도형 PABQ의 넓이에서 도형 P′ABQ′의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

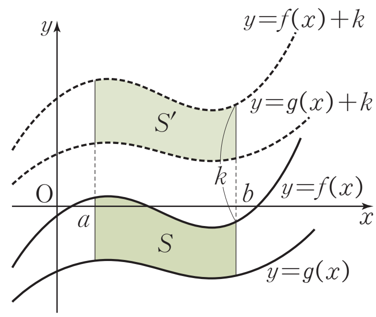


(ii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$가 음의 값을 가질 때

오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여

$$f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$$

이 되게 할 수 있다.



따라서 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 곡선 $y=f(x)+k$와 $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

(iii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \leq g(x)$일 때, 넓이 S는 앞의 (i), (ii)와 같은 방법으로

$$S=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

예제 02

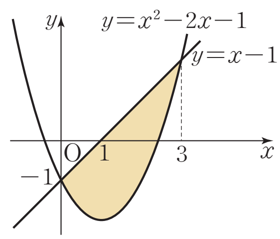
다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x-1$, $y=x-1$ (2) $y=-x^2+5x-6$, $y=x^2-3x$

풀이 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-2x-1=x-1$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

이때 구간 $[0, 3]$에서 $x-1 \geq x^2-2x-1$이므로 구하는 넓이 S는



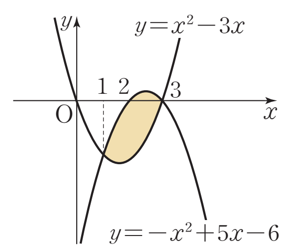
$$S=\int_0^3 \{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_0^3 (-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+5x-6=x^2-3x$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

이때 구간 $[1, 3]$에서 $-x^2+5x-6 \geq x^2-3x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_1^3 \{(-x^2+5x-6)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=-2\int_1^3 (x^2-4x+3)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{8}{3}$

문제 3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

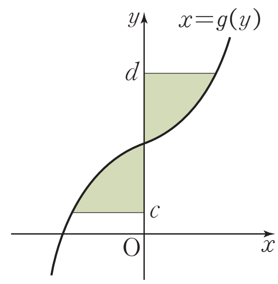
(1) $y=x^2+1$, $y=2x+4$ (2) $y=-x^2-2x$, $y=x-4$

문제 4 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1$, $y=-x^2+4x+5$ (2) $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$

도형의 넓이를 구할 때, 도형의 모양에 따라 y에 대하여 적분하는 것이 편리한 경우가 있다. x가 y의 함수로 주어진 경우 도형의 넓이를 구하여 보자.

이와 같은 함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.



$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

보기 곡선 $x=y^2$과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^3 y^2 dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3=\frac{26}{3}$$

문제 5 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

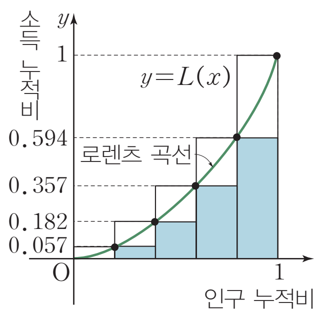
(1) $x=y^2-2y$, y축, $y=1$, $y=3$ (2) $x=y^2$, $x=y+2$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

다음은 2011년 5월 통계청에서 발표한 우리나라의 소득 점유율을 나타낸 것이다. 이 자료를 바탕으로 로렌츠 곡선을 그리면 오른쪽과 같다.

소득 분위	1분위	2분위	3분위	4분위	5분위
월평균 소득(천 원)	1106.3	2409.6	3370.9	4568.3	7831.3
소득 점유율(%)	5.7	12.5	17.5	23.7	40.6
누적비	0.057	0.182	0.357	0.594	1



컴퓨터를 이용하여 로렌츠 곡선을 다항식으로 나타내면 그 식 $L(x)$는

$$L(x)=2.0x^5-3.3x^4+1.6x^3+0.5x^2+0.1x\ (0\le x\le 1)$$

와 같다. 이 식을 이용하여 우리나라의 지니 계수를 구하여라. (단, $L(x)$의 계수는 소수 둘째 자리에서 반올림한 것이다.)

02 속도와 거리

● 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

정적분을 활용하여 속도와 거리를 어떻게 구하는가?

생각 열기

안전거리

자동차를 운전할 때 운전자가 브레이크를 밟는 순간부터 자동차가 정지할 때까지의 거리를 제동 거리라고 한다. 고속 국도의 차 간 안전거리는 위험을 인식하고 브레이크가 실제로 작동하기까지 움직인 거리인 공주 거리와 제동 거리를 고려하여 정한다.

탐구 활동

직선 도로 위를 매초 30 m의 속도로 달리던 자동차가 제동을 걸기 시작하여 t초 후의 위치가 $x(t)=30t-5t^2$(m)일 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. t초 후의 속도 $v(t)$를 구하여 보자.

2. $\int_0^3 v(t)dt$의 값을 구하고, $t=3$일 때의 자동차의 위치와 비교하여 보자.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 주어졌을 때, 점 P의 위치 $x=f(t)$를 구하여 보자.

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이므로 시각 t_0에서의 점 P의 위치를 $f(t_0)=x_0$이라고 하면

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt=f(t)-f(t_0)=x-x_0$$

● 위치 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도

이다. 따라서 시각 t에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

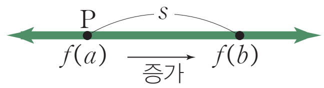
이고, 또 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(b)-f(a)&=\left\{x_0+\int_{t_0}^{b} v(t)dt\right\}-\left\{x_0+\int_{t_0}^{a} v(t)dt\right\} \\ &=\int_{t_0}^{b} v(t)dt-\int_{t_0}^{a} v(t)dt=\int_{a}^{b} v(t)dt \end{aligned}$$

이제 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 수직선 위에서 점 P가 움직인 거리, 즉 경과 거리 s를 구하여 보자.

(i) $v(t)>0$일 때

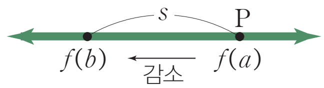
점 P의 위치 $x=f(t)$는 증가하므로 수직선의 양의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$에서 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$를 뺀 것과 같다.



$$s=f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$

(ii) $v(t)<0$일 때

점 P의 위치 $x=f(t)$는 감소하므로 수직선의 음의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$에서 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$를 뺀 것과 같다.



$$s=f(a)-f(b)=\int_b^a v(t)dt=-\int_a^b v(t)dt$$

(i), (ii)에 의하여 $s=\displaystyle\int_a^b |v(t)|dt$

이상을 정리하면 다음과 같다.

속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 t_0에서의 점 P의 위치를 x_0이라고 하면

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치: $x=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량: $\displaystyle\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리: $s=\displaystyle\int_a^b |v(t)|dt$

보기 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=3t^2-6t$일 때

(1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

$$\int_0^3 (3t^2-6t)dt=\Big[t^3-3t^2\Big]_0^3=0$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

$v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $v(t)\le 0$이고, 구간 $[2,\ 3]$에서 $v(t)\ge 0$이다. 따라서 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^2 (-3t^2+6t)dt+\int_2^3 (3t^2-6t)dt$$
$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3=8$$

문제 1 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-3t+2$일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 물체의 위치는 1이다.)

(1) 시각 $t=2$에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리

예제 01 지면으로부터 20 m의 높이에서 49 m/s의 속도로 똑바로 쏘아 올린 로켓의 t초 후의 속도가 $v(t)=49-9.8t$(m/s)라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 로켓을 발사하고 10초 후의 위치

(2) 로켓을 발사하고 10초 동안 움직인 거리

풀이 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 20 m이므로, 10초 후의 위치 x는

$$x=20+\int_0^{10}(49-9.8t)dt=20+\Big[49t-4.9t^2\Big]_0^{10}=20(\mathrm{m})$$

(2) $v(t)=49-9.8t=0$에서 $t=5$이므로 구간 $[0, 5]$에서 $v(t)\geq 0$이고, 구간 $[5, 10]$에서 $v(t)\leq 0$이다. 따라서 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{10}|49-9.8t|dt=\int_0^5(49-9.8t)dt+\int_5^{10}(9.8t-49)dt$$

$$=\Big[49t-4.9t^2\Big]_0^5+\Big[4.9t^2-49t\Big]_5^{10}=245(\mathrm{m})$$

답 (1) 20 m (2) 245 m

문제 2 직선 궤도를 60 m/s의 속도로 달리는 열차에 제동을 걸면 t초 후의 속도가 $v(t)=60-3t$(m/s)라고 한다. 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 이때까지 열차가 움직인 거리를 구하여라.

사고력 기르기

추론

의사소통

▶문제 해결

엘리베이터를 타고 어느 건물의 1층에서 옥상까지 중간에 멈추지 않고 올라가는데 처음 4초 동안은 t m/s의 속도로, 다음 8초 동안은 4 m/s의 속도로, 그 다음 4초 동안은 $(16-t)$m/s의 속도로 올라가 옥상에서 정지하였다. 이 건물의 1층에서 옥상까지 엘리베이터가 움직인 거리를 구하여라.

중단원 기초

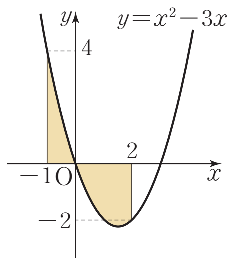
1 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-x-2$

(2) $y=x(x+1)(x+2)$

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2-3x$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

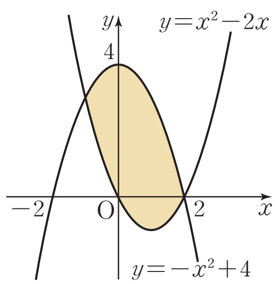
3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1$, $y=x+1$

(2) $y=x^3$, $y=x$

01 넓이
곡선과 직선 사이의 넓이

4 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
두 곡선 사이의 넓이

5 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도가

$$v(t)=-t^2+4t-3$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 물체의 위치의 변화량

(2) 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 물체가 움직인 거리

02 속도와 거리

[해답 p.212]

중단원 기본

1 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$ $(a>2)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-4x+5$, $y=-x^2+6x-3$

(2) $y=x^3-x^2$, $y=x^2$

01 넓이
두 곡선 사이의 넓이

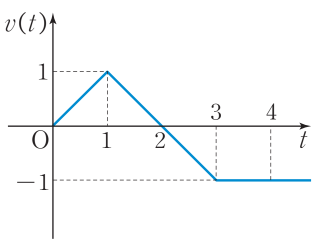
3 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분될 때, $(m+2)^3$의 값을 구하여라.

01 넓이

4 함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이

5 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 오른쪽 그림과 같이 주어졌을 때, 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.



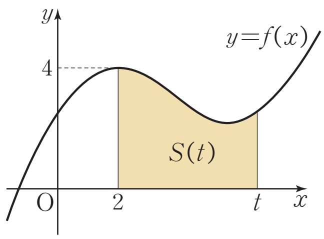
ㄱ. $t=1$에서의 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은 1이다.
ㄷ. $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 2이다.

02 속도와 거리

[해답 p.212]

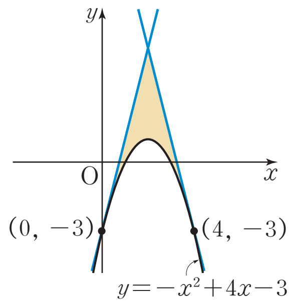
중단원 실력

1 오른쪽 그림과 같이 연속함수 $y=f(x)$의 그래프에서 색칠한 부분의 넓이를 $S(t)$라고 하자. $f(2)=4$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{S(2+h)-S(2)}{h}$의 값을 구하여라.



01 넓이

2 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 이 곡선 위의 두 점 $(0,\ -3)$, $(4,\ -3)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이

곡선과 접선 사이의 넓이

3 곡선 $y=-x^2+1$과 이 곡선 위의 점 $(a,\ -a^2+1)$에서의 접선 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, S의 최솟값을 구하여라. (단, $0<a<1$)

01 넓이

넓이의 최대 · 최소

4 직선의 철로 위를 25 m/s의 속도로 달리던 열차의 기관사가 x m 앞에 있는 장애물을 발견하고 급제동을 걸었다. 제동을 걸기 시작하여 t초 후 열차의 속도가

$$v(t)=25-4t(\text{m/s})$$

라고 할 때, 이 열차가 장애물과 부딪히지 않고 정지하기 위한 x값의 범위를 구하여라.

02 속도와 거리

수행 과제

댐의 설계와 적분법

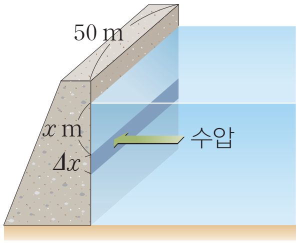
물을 가두고 있는 댐은 엄청난 수압을 받는다. 따라서 댐을 설계할 때에는 이 점을 중요하게 고려해야 한다.

수면으로부터의 깊이가 x m인 지점에서 댐에 수직으로 미치는 수압은 1 m^2당 x t, 즉 x $\mathrm{t/m^2}$라고 한다. 이를테면 깊이가 10 m인 곳에서는 10 $\mathrm{t/m^2}$의 압력을 받게 되는 것이다.

일반적으로 단위 넓이에 미치는 힘이 압력이므로 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다.

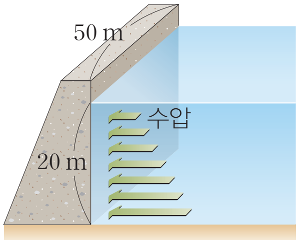
폭이 50 m인 댐에 20 m 높이까지 물이 찼을 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | 1 오른쪽 그림과 같이 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\Delta x)$ m인 지점까지의 넓이를 구하여 보자.



| 과 제 | 2 과제 1에서 구한 넓이에 미치는 힘을 구하여 보자. (단, 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\Delta x)$ m인 지점까지 댐에 수직으로 미치는 수압은 x $\mathrm{t/m^2}$로 동일하다고 가정한다.)

| 과 제 | 3 정적분을 이용하여 수면으로부터의 깊이가 20 m일 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하여 보자.



대단원 학습 내용 정리

1 부정적분

부정적분

$F'(x)=f(x)$일 때,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

실수배, 합, 차의 부정적분

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

2 구분구적법

구분구적법

도형의 넓이나 부피를 여러 개의 간단한 도형으로 세분하여 그들의 넓이나 부피의 합의 극한값으로 구하는 방법

3 정적분

정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b\text{)}$$

미적분의 기본 정리

$f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

4 정적분의 계산

정적분의 성질

임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 실수)

(2) $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(4) $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

5 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b|f(x)|dx$$

두 곡선 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

6 속도와 거리

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 할 때

(1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 점 P가 실제로 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b|v(t)|dt$$

용어와 기호 부정적분, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 미적분의 기본 정리, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\Big[F(x)\Big]_a^b$

대 / 단 / 원 평가 문제

선택형

1 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $3x^4-2x+5$일 때, $f(0)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2 부정적분 $\int \frac{x^2}{x+1}dx+\int \frac{x}{x+1}dx$를 구하면?
(단, C는 적분상수)

① $\frac{1}{2}x^2+C$
② $\frac{1}{2}x^2+x+C$
③ x^2+2x+C
④ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$
⑤ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

3 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=x^3-2x$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

4 모든 실수 x에 대하여 $\int(2x-4)dx>0$이 성립하도록 하는 $\int(2x-4)dx$의 적분상수 C의 값이 될 수 있는 수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

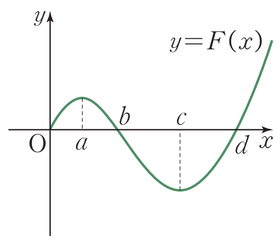
5 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\int_1^a x^3dx$일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

6 연속함수 $f(x)$에 대하여
$\int_1^4 f(x)dx=A,\ \int_3^5 f(x)dx=B,\ \int_3^4 f(x)dx=C$
일 때, $\int_1^5 f(x)dx$를 A, B, C를 이용하여 바르게 나타낸 것은?

① $A+B+C$ ② $A-B+C$
③ $A+B-C$ ④ $B-A+C$
⑤ $A-B-C$

7 연속함수 $f(x)$에 대하여
$F(x)=\int_0^x f(t)dt$
일 때, $x\geq0$인 구간에서 $y=F(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중 옳은 것은?

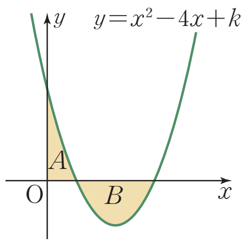


① $f(a)>0$ ② $f(b)>0$ ③ $f(c)=0$
④ $f(d)<0$ ⑤ $f(0)<0$

8 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x|t-5|dt$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 4 ⑤ 5

9 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+k$와 x축, y축으로 둘러싸인 두 도형 A, B의 넓이의 비가 $1:2$일 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{4}{3}$　　② $\frac{5}{3}$　　③ 2
④ $\frac{7}{3}$　　⑤ $\frac{8}{3}$

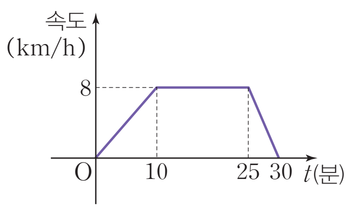
10 두 곡선 $y=2x^3-x^2-5x$, $y=-x^2+3x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 10　　② 12　　③ 14
④ 16　　⑤ 18

11 함수 $f(x)=x^3-x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^2 f(x)dx+\int_1^6 g(x)dx$의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12
④ 13　　⑤ 14

12 채연이는 하루에 30분씩 러닝머신 위에서 달리기를 한다. 다음 그림은 채연이가 달리는 러닝머신에 표시된 속도 그래프이다. 채연이가 러닝머신 위에서 달린 거리는?



① 2 km　　② 3 km　　③ 4 km
④ 5 km　　⑤ 6 km

서답형

13 두 점 $(0, 2)$와 $(1, 0)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^3에 비례할 때, $f(x)$를 구하여라.

14 양의 정수 n에 대하여

$$a_n=\int_0^n 3x^2dx$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^4}$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 곡선 $y=x^3+1$과 이 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 수직선 위에 좌표가 10인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도가 $v(t)=8-4t$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 P의 운동 방향이 바뀌는 것은 몇 초 후인지 구하고, 이때 점 P의 좌표를 구하여라.

(2) 점 P가 출발하여 원점에 올 때까지의 걸리는 시간을 구하고, 이때 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

M+ Real Life

수 학 ✚ 실 생 활

심장은 적분으로 뛴다.

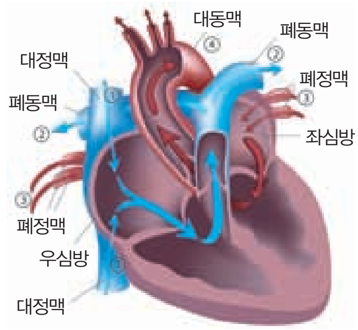
요즘 우리나라 사람들의 화두는 단연 건강이다. 웰빙 바람과 함께 시작된 건강에 대한 관심이 높아지며 수많은 책들이 출간되고 있고, 각종 매스컴에서는 저마다 건강식품과 운동 방법을 소개하고 있다. 여기에 의료 수준의 향상으로 사람들의 평균 수명은 해를 거듭할수록 꾸준히 늘고 있다.

2012년 11월 14일 인구보건복지협회가 발간한 '유엔인구기금(UNFPA) 2012 세계 인구현황보고서 한국어판' 에 따르면, 기대수명은 세계 평균이 남성 67.1세, 여성 71.6세로 집계되었다. 선진국의 경우 남녀가 각각 74.6세, 81.3세인 반면, 개발도상국은 65.6세, 69.4세로 나타나 선진국과 개발도상국 간 평균 기대수명의 차이가 남성은 9살, 여성은 12살가량 났다. 우리나라 남성의 평균 기대수명은 77.3세로 세계 26위, 여성은 84.0세로 세계 8위였다. 북한은 남성 65.9세와 여성 72.1세로 모두 117위였다. 남북한의 기대수명 차이는 약 11~12년이었다.

그렇다면 우리나라 사람들의 사망 원인 1위는 무엇일까?

최근 통계청은 '2011년 사망원인통계' 에서 우리나라 총 사망자 수는 25만 7396명이며, 사망 통계를 작성한 이래 역대 최고치를 기록했다고 발표했다. 흔히 암이 가장 주된 사망 원인이라고 생각하고 있지만, 실제로는 뇌졸중, 동맥 경화, 심근 경색과 같은 혈관 질환이 우리나라 65세 이상의 고령 인구에서 사망 원인 1위의 질환이라고 한다. 이런 혈관 질환 대부분은 혈액이 어떤 저항 때문에 혈관을 따라 잘 흐르지 못하기 때문에 생기는 질환이다.

심장의 건강 상태를 알아보는 한 가지 방법은 단위 시간에 심장으로부터 뿜어져 나오는 혈액의 양인 심박출량을 측정하는 것이다.



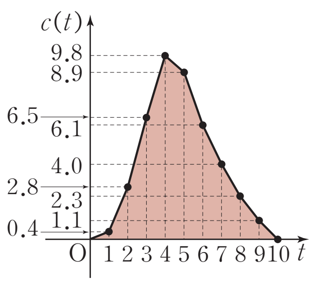
혈액은 대정맥을 통해 몸으로부터 되돌아와서 심장의 우심방으로 들어가(①) 폐동맥을 거쳐(②) 폐로 들어가서 산소와 결합한다. 그리고 폐정맥을 거쳐 좌심방으로 들어가서(③) 대동맥을 통해 다시 몸 전체로 전달된다.(④)

심박출량은 염료 희석법으로 측정하는데, 염료를 우심방으로 주입하면 심장을 거쳐 대동맥으로 들어간다. 대동맥으로 삽입된 탐침이 심장을 떠나는 염료의 농도를 염색약이 없어질 때까지 일정한 시간 간격으로 측정하여 염료의 농도를 구하고, 이를 이용하여 심박출량을 계산한다. 염료의 농도를 측정하는 시간 구간을 [0, T]라 하고 $c(t)$를 시각 t에서 염료의 농도라고 하면 심박출량 F는 다음과 같이 계산한다.

$$F=\frac{A}{\int_0^T c(t)dt} \quad \text{(단, } A\text{는 염료의 양)}$$

예를 들어 5 mg의 염료를 우심방에 주입하여 염료의 농도를 L당 mg으로 대동맥에서 1초 간격으로 측정하여 다음 표를 얻었다고 하자. 이때 염료의 농도는 시간이 흐를수록 점점 진해지다가 다시 약해져서 나중에는 0이 될 것이다.

t(초)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c(t)$(mg/L)	0	0.4	2.8	6.5	9.8	8.9	6.1	4.0	2.3	1.1	0



심박출량을 알기 위해서는 정적분 $\int_0^{10} c(t)dt$를 계산해야 하는데, 그 값은 왼쪽 그래프에서 색칠한 부분의 넓이로 어림잡아 생각할 수 있다. 따라서 $A=5$이고 색칠한 부분의 넓이는 약 41.87이므로 심장은 다음과 같이 1초당 약 120 mL의 혈액을 온몸에 공급하고 있음을 알 수 있다.

$$F=\frac{A}{\int_0^{10} c(t)dt}=\frac{5}{41.87}=0.12(\mathrm{L/s})$$

우리가 적분을 모른다고 하더라도 우리의 혈액 순환 계통은 이미 수학적으로 매우 아름답게 설계되어 있다. 수학이 별로 소용되는 곳이 없는 학문이라고 생각하고 있는 그 순간에도 여러분의 뇌와 혈관 그리고 몸의 모든 조직들은 이미 수학을 이용하고 있다.

부 록

Ⅰ 수열의 극한

|준|비|학|습| [p. 11]

1 (1) $a_n=(-1)^n\cdot n$ (2) $a_n=\frac{n}{n+2}$

2 (1) $\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}$ (2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

3 (1) $3(2^n-1)$ (2) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1 수열의 극한

01 수열의 수렴과 발산 [p. 13~16]

탐구 활동

1 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ **2** 0에 가까워진다.

1 (1) 0 (2) 1 (3) -1

2 (1) (음의 무한대로) 발산 (2) (양의 무한대로) 발산

3 (1) 발산(진동) (2) 발산(진동)

사고력 기르기

$\{a_{2n-1}\}$: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=0$

$\{a_{n+1}\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$

02 극한값의 계산 [p. 17~20]

탐구 활동

1 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=-2$

2 $\lim_{n\to\infty}3a_n=3\lim_{n\to\infty}a_n=3$

3 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=3$

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{1}{3}$

1 (1) 0 (2) -3

사고력 기르기

수열 $\{b_n\}$이 반드시 수렴한다고 할 수 없으므로 수열의 극한에 대한 기본 성질이 성립하지 않는다.

예 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n\neq\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

2 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 2 (4) 0

창의 up

① 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하려면 수렴하는 수열을 만들어야 한다.

② 두 수열 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$과 $\left\{2+\frac{3}{n^2}\right\}$이 수렴

탐구 활동

1 $a_n<b_n$

2 $2=\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n=3$

3 3

03 등비수열의 극한값 [p. 21~24]

탐구 활동

1 수렴 **2** (양의 무한대로) 발산

1 (1) 발산 (2) 수렴
(3) 수렴 (4) 발산

2 (1) 수렴, 0 (2) 발산
(3) 수렴, 5 (4) 수렴, $\frac{9}{4}$

3 $|r|>1$일 때, 1에 수렴
$|r|<1$일 때, r에 수렴
$r=1$일 때, 1에 수렴
$r=-1$일 때, 0에 수렴

사고력 기르기

두 양수 a, b에 대하여

(i) $a>b$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\left(\frac{b}{a}\right)^n\cdot b}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=a$

(ii) $a=b$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}0=0$

(iii) $a<b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot a-b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=\frac{0\cdot a-b}{0+1}=-b$$

| 단원 과제 |

(1) 동전 A_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$r_n=1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$, $a_n=\pi r_n{}^2=\pi\left(\frac{81}{100}\right)^n$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\left(\frac{81}{100}\right)^n=0$이므로 n이 한없이 커지면 동전의 넓이는 0에 가까워진다.

중단원 기초 [p. 25]

1 (1) 수렴 (2) 발산
(3) 발산 (4) 수렴

2 (1) -1 (2) -6 (3) 24 (4) $\frac{1}{2}$

3 (1) 수렴, $\frac{3}{2}$ (2) 발산
(3) 수렴, 0 (4) 수렴, $\frac{2}{3}$

4 2

5 (1) 발산 (2) 수렴
(3) 발산 (4) 수렴

중단원 기본 [p. 26]

1 ㉠, ㉢

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n^2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}$
$=3\cdot2=6$

3 8

4 -1

5 (i) $|x|>1$일 때 $f(x)=x$
(ii) $x=1$일 때 $f(1)=3$
(iii) $|x|<1$일 때 $f(x)=2x+3$
$f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=5$

중단원 실력 [p. 27]

1 ㄴ. 진동하는 수열은 모두 발산한다.
ㄹ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_{n+1}\}$도 수렴한다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 $a_n=\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)$
$\lim_{n\to\infty}50a_n=50\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)\}$
$=50\times\frac{2}{1+1}=50$

3 ㉠ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n}=\infty$

㉡ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}=0$

㉢ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㉡, ㉢이다.

4 $n=2, 3, 4, \cdots$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+3-2^{n-1}=2^{n-1}+3$
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+3}{2^n}=\frac{1}{2}$

5 $a_n=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$
$=\frac{1}{4}(10^{n+1}-2^{n+1}-5^{n+1}+1)$
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-2^{n+1}-5^{n+1}+1}{10^n}=\frac{1}{4}\cdot10=\frac{5}{2}$

2 급수

01 급수의 수렴과 발산 [p. 29~32]

탐구 활동

1 $a_n=3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ **2** $S_n=1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구한다.

1 (1) 발산 (2) 수렴

2 (1) 수렴, $\frac{3}{4}$ (2) 발산

3 $S_n=\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}+\cdots+\log\frac{n+2}{n}$라고 하면

$S_n=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\infty$이므로 이 급수는 양의 무한대로 발산한다.

4 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{1}{n^2}}=\infty\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

창의 up

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산한다.

02 등비급수 [p. 33~36]

탐구 활동

1 $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **2** $\lim_{n\to\infty} S_n=1$

3 정사각형의 넓이와 **2**의 결과는 같다.

1 (1) 발산 (2) 수렴, 6

탐구 활동

1 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-5$

2 $\sum_{n=1}^{\infty}3a_n=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$

2 (1) 50 (2) 0

3 (1) $\frac{1}{6}$ (2) 2

사고력 기르기

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$

(ⅰ) $2\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)+3\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$

$\lim_{n\to\infty}(4a_n+6b_n+3a_n-6b_n)=7\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

(ⅱ) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)-2\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n-2a_n+4b_n)=7\lim_{n\to\infty}b_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 0에 수렴한다.

| 단원 과제 |

식물원 내부에 들어오는 햇빛의 양은 $\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+\frac{a}{64}+\cdots$와 같이 첫째항이 $\frac{a}{4}$이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

그 합은 $\frac{\frac{a}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a}{3}$

03 등비급수의 활용 [p. 37~38]

탐구 활동

1 $0.\dot{9}=0.9+0.09+0.009+\cdots$

2 첫째항: 0.9, 공비: 0.1

3 $0.\dot{9}=\frac{0.9}{1-0.1}=1$

1 (1) $\frac{4}{11}$ (2) $\frac{218}{165}$

2 $\frac{4}{5}$

3 점 P_n이 점 (x, y)에 한없이 가까워진다고 하면

$$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$
$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots=\frac{9}{13}$$
$$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$$
$$=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots=\frac{6}{13}$$

따라서 점 P_n은 점 $\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$에 가까워진다.

중단원 기초 [p.39]

1 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{2}{3}$

(3) 발산 (4) 수렴, 1

2 (1) $a_n=\frac{2n}{3n+2}$으로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

(2) $a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$으로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

(3) $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$으로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

(4) $a_n=\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=2\neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

3 (1) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 (1) 4 (2) 13 (3) 2

5 (1) $\frac{4}{33}$ (2) $\frac{32}{45}$ (3) $\frac{134}{99}$

중단원 기본 [p.40]

1 ㉡, ㉢

2 -2

3 (1) $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

(2) $\frac{3}{x^2}$

4 (1) $\frac{42}{5}$ (2) $\frac{1}{9}$

5 9000시간

중단원 실력 [p.41]

1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-3\right)=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n}=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n}{8n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\frac{a_n}{2n}-2}{4-\frac{a_n}{2n}}=\frac{3\cdot 3-2}{4-3}=7$$

2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(-1<r<1)$라 고 하면

$$\frac{a}{1-r}=2,\quad \frac{a^2}{1-r^2}=\frac{4}{3}$$

따라서 $a=1$, $r=\frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3=\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}$$

3 $\frac{304}{999}=0.\dot{3}0\dot{4}=0.304304\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)+4\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)=\frac{16}{7}$$

4 $a_1=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$a_2=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\vdots$

$a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots$은 첫째항이 $\frac{3}{4}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비급수이므로 그 합은 $\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$

수행 과제 [p. 42]

1 $a_n=2^{n-1},\ l_n=\dfrac{1}{3^n}$

2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} l_n=0$

3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n l_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{3^n}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}\right)=1$

버려지는 선분의 총 길이가 1이므로 칸토어 집합의 길이는 0이다.

대/단/원 평가 문제 [p. 44~45]

1 ③, ⑤	**2** ①	**3** ⑤	**4** ②	**5** ⑤
6 ②	**7** ④	**8** ②	**9** ②, ④	**10** ⑤
11 ④	**12** 6	**13** $\frac{1}{2}$	**14** 풀이 참조	
15 풀이 참조				

3 $\alpha_n+\beta_n=2n^2-1,\ \alpha_n\beta_n=n^2$이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{2n^2-1}{n^2}=2-\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$$

10 ⑤ $-1<r<1$이면 $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{r}{2}-1<-\dfrac{1}{2}$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r}{2}-1\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

12 $(2n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{b_n}{2n+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(4n+3)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=2\cdot3=6$$

14 등비수열 $\left\{(x-2)\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$x-2=0$ 또는 $-1<\dfrac{2x+1}{3}\le1$

$x=2$ 또는 $-2<x\le1$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이다.

15 점 P_n이 점 $(x,\ y)$에 한없이 가까워진다고 하면

$x=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}+\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5}+\cdots$

$$=3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots=\frac{3}{1-\dfrac{1}{4}}=4$$

$y=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}+\overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6}+\cdots$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots=\frac{\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{1}{4}}=2$$

따라서 점 P_n은 점 $(4,\ 2)$에 가까워진다.

Ⅱ 함수의 극한과 연속

|준|비|학|습| [p. 49]

1 (1) 2 (2) ∞ (3) ∞ (4) $\dfrac{1}{3}$

2 (1) -1 (2) $\dfrac{5}{9}$

1 함수의 극한

01 함수의 극한의 뜻 [p. 51~56]

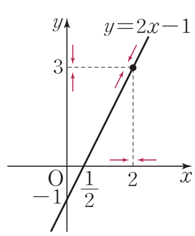
탐구 활동

1 1.9, 1.99, 1.999, 2.001, 2.01, 2.1

2 2에 가까워진다고 할 수 있다.

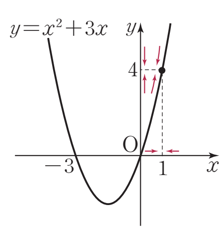
3 그래프에서 x의 값이 1에 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 가까워진다.

1 (1)



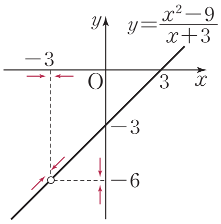
$\lim\limits_{x\to2}(2x-1)=3$

(2)



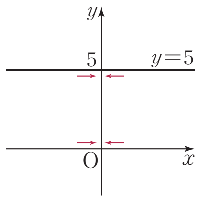
$\lim\limits_{x\to1}(x^2+3x)=4$

(3)



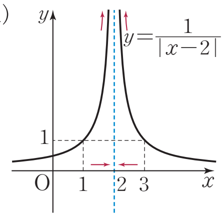
$\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

(4)



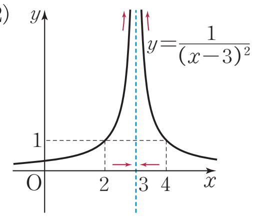
$\lim_{x\to 0} 5=5$

2 (1)



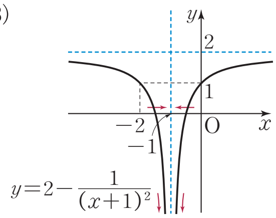
$\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{|x-2|}=\infty$

(2)



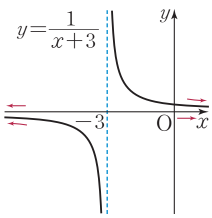
$\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

(3)



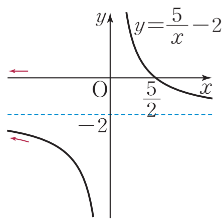
$\lim_{x\to -1} \left\{2-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right\}$
$=-\infty$

3 (1)



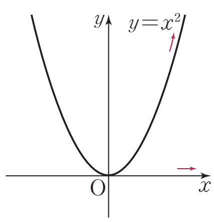
$\lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{x+3}=0$

(2)



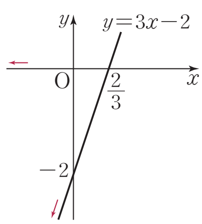
$\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{5}{x}-2\right)=-2$

(3)



$\lim_{x\to \infty} x^2=\infty$

(4)

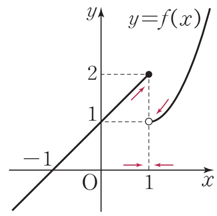


$\lim_{x\to -\infty} (3x-2)=-\infty$

탐구 활동

1 1 **2** 0 **3** 서로 다르다.

4 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

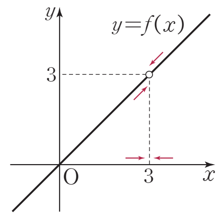


(1) $\lim_{x\to 1-} f(x)=2$

(2) $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

5 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$라고 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

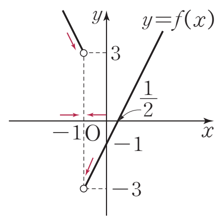


$\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$,

$\lim_{x\to 3+} \dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$에서

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$

(2) $f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (x<-1) \\ 2x-1 & (x>-1) \end{cases}$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\lim_{x\to -1-} f(x)=3$,

$\lim_{x\to -1+} f(x)=-3$에서

$\lim_{x\to -1-} f(x)\neq \lim_{x\to -1+} f(x)$이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

사고력 기르기

예 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$에 대하여

$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=1$이고

$\lim_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0+} \dfrac{\dfrac{1}{x^3}-1}{\dfrac{1}{x^3}+1}$

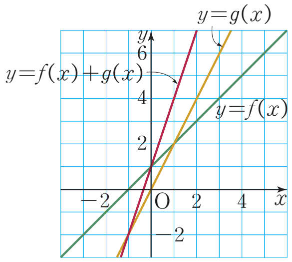
$=\lim_{x\to 0+} \dfrac{1-x^3}{1+x^3}=1\ (x\neq 0)$이므로

$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

02 함수의 극한에 대한 성질 [p. 57~62]

탐구 활동

1



2 7

3 7

4 서로 같다.

1 (1) 4 (2) 6 (3) -3 (4) -2

2 (1) 1 (2) 3 (3) 6 (4) 2

3 (1) $-\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $-\sqrt{2}$

4 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

5 (1) $a=-6$, $b=-6$ (2) $a=4$, $b=8$

사고력 기르기

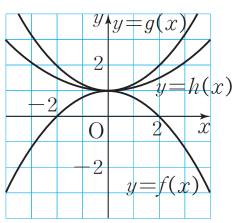
$\lim_{x\to0} f(x)\cdot\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0} f(x)g(x)$

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$의 값이 존재하지 않으므로 함수의 극한에 대한 성질이 성립하지 않는다.

탐구 활동

1 임의의 x에 대하여

$f(x)\le h(x)\le g(x)$



2 $\lim_{x\to2} f(x)=0$, $\lim_{x\to2} g(x)=2$, $\lim_{x\to2} h(x)=\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to2} f(x)\le\lim_{x\to2} h(x)\le\lim_{x\to2} g(x)$

3 함숫값 사이의 부등호 방향과 극한값 사이의 부등호 방향이 같다.

6 5

7 2

| 단원 과제 |

태풍의 중심 C의 좌표를 $(0,\ y)$, 태풍의 경계 위의 점 P의 좌표를 $(x,\ -x^2)$으로 놓으면

$\overline{\text{CO}}^2=\overline{\text{CP}}^2$이므로 $y^2=x^2+(x^2+y)^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

P→O이면 $x\to0$이므로 태풍의 중심 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$\lim_{x\to0} y=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

따라서 태풍의 중심 C는 공주 지역으로 한없이 가까워진다.

중단원 기초 [p. 63]

1 (1) 4 (2) 3 (3) 1 (4) $\sqrt{2}$

2 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) 0 (4) ∞

3 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) -1 (4) 1

4 (1) 11 (2) 7 (3) 9 (4) 0

5 (1) 12 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{4}$

(4) 3 (5) 0 (6) 1

중단원 기본 [p. 64]

1 ㉠

2 -9

3 (1) 192 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{3}{4}$

4 (1) $a=2\sqrt{3}$, $b=-4$이므로 $a^2+b^2=28$

(2) $a=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=-1$$

5 3

중단원 실력 [p. 65]

1 (i) $x \to 1+$일 때 $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$이므로 $f(x)=x$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

(ii) $x\to 1-$일 때 $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로 $f(x)=x-1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

2 ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재하므로

$\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)$

의 값도 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)$와 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하므로

$\lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)$의 값도 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 $f(x)-g(x)=h(x)$라고 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 1} h(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{5f(x)-2h(x)}{f(x)+h(x)}=5$$

4 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=3$이므로 $f(x)$는 이차식이고 이차항의 계수는 3이다.

$f(x)=3x^2+ax+b$로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$에서 $3+a+b=0$이므로

$b=-3-a$를 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+3+a)}{(x-1)(x+2)}=\frac{6+a}{3}=2$$

$a=0$, $b=-3$이므로 $f(x)=3x^2-3$

$f(2)=9$

5 세 점 P, Q, R의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(x,\ x)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{x},\ x)$, $\mathrm{R}(x,\ x^2)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-x^2|}{|\sqrt{x}-x|}=\lim_{x\to 1}|\sqrt{x}+x|=2$$

2 함수의 연속

01 함수의 연속 [p. 67~71]

탐구 활동

1 ㉡, ㉢ **2** ㉠, ㉢ **3** ㉢

1 (1) 연속 (2) 불연속
(3) 불연속 (4) 연속

2 (1) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$
(2) $[-2,\ 2]$

3 (1) $(-\infty,\ \infty)$
(2) $\left[-\frac{3}{2},\ \infty\right)$
(3) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$

4 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 점에서 연속이다.

5 $a=-2$, $b=\frac{1}{4}$

| 단원 과제 |

(1) $$f(x)=\begin{cases}\frac{6}{100}x & (x\le 1200)\\ \frac{15}{100}x-108 & (1200<x\le 4600)\\ \frac{24}{100}x-k & (4600<x\le 8800)\\ \frac{35}{100}x-490 & (8800<x\le 30000)\\ \frac{38}{100}x-900 & (x>30000)\end{cases}$$

(2) $f(1200)=\frac{6}{100}\cdot 1200=72$

$\lim_{x\to 1200+} f(x)=72$, $\lim_{x\to 1200-} f(x)=72$

$\lim_{x\to 1200} f(x)=f(1200)$이므로 $x=1200$에서 연속이다.

(3) $f(4600)=\frac{15}{100}\cdot 4600-108=582$

$\lim_{x\to 4600+} f(x)=1104-k$, $\lim_{x\to 4600-} f(x)=582$

$\lim_{x\to 4600} f(x)=f(4600)$이므로

$1104-k=582$, $k=522$

02 연속함수의 성질 [p.72~76]

탐구 활동

잘못된 의견: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2}{x-1}$도 $x=1$에서 연속이야.

이유: $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않는다.

1 (1) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(2) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(3) 함수 $f(x)$는 $x\neq-2$인 모든 실수에서 연속이다.

사고력 기르기

예 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$이라고 하면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

탐구 활동

1 시각: 15시, 온도: 22 ℃

2 시각: 6시, 온도: 5 ℃

2 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 2, 최솟값: $\dfrac{1}{2}$
(3) 최댓값: $\sqrt{5}$, 최솟값: 0

탐구 활동

1 연속적으로 변한다.

2 고도가 5000 m인 순간이 반드시 있다.

3 (1) $f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고
$f(1)=-1<0,\ f(2)=3>0$
이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3-3x+1=0$은 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.
(2) $f(x)=\dfrac{3}{x}-5x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$에서 연속이고
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}>0,\ f(1)=-1<0$
이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $\dfrac{3}{x}-5x+1=0$은 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

4 (1) 예 함수 $f(x)=x^2-2x$는 열린 구간 $(0,\ 5)$에서 연속이지만 최댓값은 존재하지 않고, $x=1$일 때 최솟값은 -1이다.
(2) 함수 $f(x)=x^2-2x+3$은 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고
$f(0)=3>0,\ f(4)=11>0$
이므로 부호가 같고 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(0,\ 4)$에 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 같을 때 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 존재한다고 할 수 없다.

창의 up

y축과 평행인 직선이 y축에서 출발하여 오른쪽으로 움직인다고 하면 그 직선이 통과한 영역의 넓이는 연속적으로 변한다.
따라서 사이값 정리에 의하여 그 직선은 주어진 도형의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이 되는 점을 지난다. 즉, 주어진 도형의 넓이를 이등분하는 y축과 평행인 직선이 존재한다.

중단원 기초 [p.77]

1 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.
(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

2 (1) $(-\infty,\ 5]$
(2) $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ \infty)$
(3) $(-\infty,\ \infty)$

3 (1) $(-\infty,\ \infty)$
(2) $(-\infty,\ \infty)$
(3) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$

4 (1) 최댓값: 20, 최솟값: -5
(2) 최댓값은 없다. 최솟값: 3

5 (1) $f(x)=x^3+3x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고
$f(-1)=-6<0,\ f(1)=2>0$
이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.
(2) $f(x)=x^4+x^3-8x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고
$f(1)=-5<0,\ f(2)=9>0$
이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^4+x^3-8x+1=0$은 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

중단원 기본 [p.78]

1 $a+b=1+3=4$

2 $a=1$

3 (i) $x>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로 $f(x)=x$
(ii) $-1<x<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $f(x)=a$
(iii) $x=1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로 $f(x)=\dfrac{1+a}{2}$
$\lim_{x\to1-}a=\lim_{x\to1+}x=\dfrac{1+a}{2}$에서 $a=1$

4 ㄹ $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))$이므로 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이라는 조건이 필요하다.
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개

5 $f(x)=x^2-2x+k$라고 하면
함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고
$f(1)=k-1,\ f(3)=k+3$
이때 $f(1)f(3)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 3)$에서 실근을 가진다.
$f(1)f(3)=(k-1)(k+3)<0,\ -3<k<1$

중단원 실력 [p.79]

1 (i) $|x|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{a}{x^{2n-1}}+\dfrac{b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$$

(ii) $|x|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로
$f(x)=ax+b$
(iii) $x=1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1+a+b}{2}$$

(iv) $x=-1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이고 $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

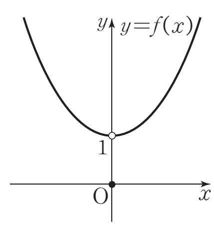
$$f(x)=\frac{-1-a+b}{2}$$

$\lim_{x\to1-}(ax+b)=\lim_{x\to1+}x=\dfrac{1+a+b}{2}$이고,

$\lim_{x\to-1-}x=\lim_{x\to-1+}(ax+b)=\dfrac{-1-a+b}{2}$이다.

따라서 $a=1,\ b=0$

2 (i) $x\neq0$이면 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=x^2+1$
(ii) $x=0$이면 $f(0)=0$
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
(2) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



3 ㉠ 구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수 $f(x)$, $g_1(x)$가 모두 연속이므로 함수 $f(x)g_1(x)$는 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이다.

㉢ $\lim_{x\to 2-} f(x)g_3(x)=0\cdot1=0$

$\lim_{x\to 2+} f(x)g_3(x)=0\cdot0=0$

$f(2)g_3(2)=0\cdot0=0$

이므로 함수 $f(x)g_3(x)$는 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이다.

따라서 연속이 되는 것은 ㉠, ㉢이다.

4 $f(0)f(1)<0$, $f(2)f(3)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(0)f(-1)<0$, $f(-2)f(-3)<0$

즉, 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-1,\ 0)$, $(-3,\ -2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

수행 과제 [p.80]

1 $\left(\frac{15}{8},\ 2\right)$

대/단/원 평가 문제 [p.82~83]

1 ② **2** ③ **3** ④ **4** ① **5** ③
6 ⑤ **7** ③ **8** ② **9** ③ **10** ④
11 $f(x)=-x^3+x^2+2x$ **12** 5
13 풀이 참조 **14** 풀이 참조

12 $\frac{5x^2-2}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{5x^2+7}{x^2}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7}{x^2}$이고,

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^2}=5$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7}{x^2}=5$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=5$

13 $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}=1$에서

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}=1$$

따라서 $a=4$, $b=-8$

14 2014년 4월 1일부터 x일이 지난 후 손목시계가 가리키는 시각에서 정확한 시각을 뺀 값을 $f(x)$라고 하면 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 30]$에서 연속이 된다.

이때 $f(0)=10$, $f(30)=-5$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족시키는 c가 0과 30 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 손목시계가 가리키는 시각이 정확한 시각과 일치하는 때는 최소한 한 번 있었다.

Ⅲ 다항함수의 미분법

|준|비|학|습| [p.87]

1 (1) 2 (2) $2x+1$

2 (1) $y=2x+4$ (2) $y=3x-1$

3 (1) 최댓값: 6, 최솟값: 2
(2) 최댓값: -3, 최솟값: -11

1 미분계수와 도함수

01 미분계수 [p. 89~92]

탐구 활동

1 $\frac{8}{5}$ km/min　　**2** $\frac{8}{5}$

3 서로 같다.

1 (1) 13　　(2) $3a^2+3a\varDelta x+(\varDelta x)^2$

2 (1) -25 m/s　　(2) $(-10a-5\varDelta x)$m/s

탐구 활동

1 $\frac{\{60(10+\varDelta x)-1.5(10+\varDelta x)^2\}-(60\cdot 10-1.5\cdot 10^2)}{(10+\varDelta x)-10}$

2 28.5, 29.85, 29.985, 29.9985

3 30 m/s

3 (1) 4　　(2) -5

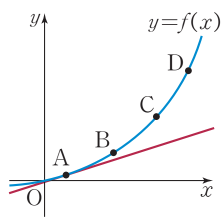
4 $a=5$

5 (1) 80원　　(2) 70원

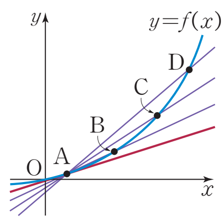
02 미분계수의 의미와 연속성 [p. 93~96]

탐구 활동

1



2



3 점 A에 접하는 직선

1 (1) 5　　(2) -12

사고력 기르기

(1) $f'(b)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$

(2) $g'(a)<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<g'(b)$

탐구 활동

1 두 함수 모두 $x=0$에서 연속이다.

2 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

2 $f(3)=0$, $\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}|3x-9|=0$이므로
$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{3(x-3)}{x-3}=3$$
$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-3(x-3)}{x-3}=-3$$

이므로 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$은 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

3 (1) $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}x^2=0$
$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x^2)=0$
이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$
이때 $f(0)=0^2=0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=0$
$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2}{x}=0$
이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다..

사고력 기르기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.
그런데 $\lim_{x\to 1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

03 도함수 [p. 97~102]

탐구 활동

1 2 **2** $2a$

3 2, 4, 6, 8

1 (1) $f'(x)=0$, $f'(2)=0$
(2) $f'(x)=1$, $f'(2)=1$
(3) $f'(x)=2x-7$, $f'(2)=-3$
(4) $f'(x)=3x^2$, $f'(2)=12$

탐구 활동

1 $y=x \Rightarrow y'=1$
$y=x^2 \Rightarrow y'=2x$
$y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$

2 $y'=4x^3$

2 (1) $y'=9x^8$ (2) $y'=11x^{10}$
(3) $y'=0$ (4) $y'=0$

3 (1) $y'=3x^2-12x$
(2) $y'=4x^3-3x^2+4x$

4 (1) $y'=5x^4-8x^3-2x+2$
(2) $y'=6x^2-4x+2$
(3) $y'=8x^3-15x^2+4x-5$
(4) $y'=10x^4-4x^3+3x^2-12x+3$

5 (1) $y'=6x^2+2x-3$
(2) $y'=4x^3+9x^2+10x+9$

사고력 기르기

(1) $y=\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$이므로
$y'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$

(2) x^7-x^3+5를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면
$x^7-x^3+5=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ①
①에 $x=1$을 대입하면 $a+b=5$
①을 x에 대하여 미분하면
$7x^6-3x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ …… ②
②에 $x=1$을 대입하면 $a=4$
$a=4$, $b=1$이므로 나머지는 $4x+1$

| 단원 과제 |

(1) $S'(T)=2A(T-60)$ $(A=9.7\times10^{-5})$
$S'(T)$는 온도 T에서 탄산음료 100 g당 녹아 있는 이산화탄소의 양의 순간변화율이다. 따라서 온도가 순간적으로 변할 때 탄산음료의 톡 쏘는 맛의 정도를 알 수 있다.

(2) 온도가 10 ℃인 탄산음료

중단원 기초 [p. 103]

1 (1) 3 (2) 6 (3) 2

2 (1) $f'(4)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{4\Delta x}{\Delta x}=4$
(2) $f'(4)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3-3}{\Delta x}=0$

3 (1) 6 (2) -3

4 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이면서 미분가능하다.
$g(x)$는 $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.
$h(x)$는 $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

5 (1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$
(2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x-2$

6 (1) $y'=8x^7$ (2) $y'=0$
(3) $y'=6x-4$ (4) $y'=10x^4-2x^3-1$
(5) $y'=6x^2-6x-7$ (6) $y'=28x^3+42x^2-2x+2$

중단원 기본 [p. 104]

1 $c=1$

2 (1) 10 (2) 30

3 $f'(-2)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(-1)$, $f'(0)$

4 $a=2,\ b=2$

5 $a+b=1$

중단원 실력 [p. 105]

1 $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=5$이므로

$f(3)-f(1)=10$ …… ①

$\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=2$이므로

$f(4)-f(3)=2$ …… ②

①과 ②를 변끼리 더하면 $f(4)-f(1)=12$

따라서 $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{12}{3}=4$

2 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2f(2)-2^2f(2)+2^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-2^2)f(2)-2^2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+2)f(2)-2^2\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=4f(2)-2^2f'(2)$

$=4\cdot3-4\cdot2=4$

3 (i) $n=-1$일 때 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, 미분가능하지 않다.

(ii) $n=0$일 때 $f(x)=|x|$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(iii) $n=1$일 때 $f(x)=x|x|$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

4 $f'(5)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(5)+f(h)-f(5)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=7$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=7$

5 $f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=3\cdot3+5\cdot4=29$

2 도함수의 활용

01 접선의 방정식 [p. 107~109]

탐구 활동

1 1

2 $y=x+1$

1 (1) $y=6x-4$ (2) $y=-2x-1$

2 (1) $y=-x-2$

(2) $y=-x+4$ 또는 $y=-x$

3 $y=-2x+1$

4 (1) $y=-3x+4$ 또는 $y=x$

(2) $y=5x+2$

5 $\overline{QR}=2\sqrt{2}$

사고력 기르기

직선 AB의 기울기는 1이므로 점 P에서의 접선의 기울기가 1일 때, 점 P와 직선 $y=x-1$ 사이의 거리가 최단 거리이다.

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$이라고 하면 $f'(x)=x$

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}\right)$이라고 하면 $f'(a)=a=1$

점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$

점 P와 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{9+9}\times\sqrt{2}=3$

02 평균값 정리 [p. 110~114]

탐구 활동

1 $a=0,\ b=3$

2 $c=\dfrac{3}{2}$는 a와 b 사이에 있다.

1 (1) 2 (2) $\dfrac{a+b}{2}$

2 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

3 $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하다. 열린 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$이므로 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.
따라서 $h(x)=k$ (k는 상수)라고 하면
$h(x)=f(x)-g(x)=k$, $f(x)=g(x)+k$

사고력 기르기

(1) 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 c가 열린 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 5$이므로
$f(2)=f(0)+2f'(c)$
$=-3+2f'(c)\le -3+2\times 5=7$

(2) 함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시키는 함수라고 하면 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=f'(c)$인 c가 열린 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(c)=\dfrac{5}{2}$인 c가 존재한다.
이것은 $f'(x)\le 2$에 모순이다.
따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$가 존재하지 않는다.

03 함수의 증가와 감소 [p.115~117]

탐구 활동

1 2시~8시 32분, 14시 47분~20시 41분

2 0시~2시, 8시 32분~14시 47분, 20시 41분~24시

1 $x_1<x_2$인 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3+x_2^3$
$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$
$x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\dfrac{x_1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_1^2>0$이므로
$f(x_1)>f(x_2)$
따라서 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

2 (1) 구간 $(-\infty, 3)$에서 감소, 구간 $(3, \infty)$에서 증가
(2) 구간 $(-\infty, -3)$, $(1, \infty)$에서 감소,
구간 $(-3, 1)$에서 증가
(3) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가
(4) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가

04 함수의 극대와 극소 [p.118~121]

탐구 활동

1 14시 **2** 6시

1 (1) 극댓값: 5, 극솟값: -27
(2) 극댓값: -5, 극솟값: -6

2 $a=0$, $b=3$, 극솟값: -1

3 $a<0$ 또는 $a>3$

사고력 기르기

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	4	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	(극소)	↗		↗	(극대)	↘

함수 $f(x)$는 $x=-4$, $x=4$, $x=8$에서 $f'(x)=0$ 이다.
이때 $f'(4)=0$이지만 $x=4$의 좌우에서 함수의 증가, 감소가 변하지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 $f'(x)=0$인 점은 3개이지만, 극값은 2개이다.
즉, $f'(x)=0$인 점에서 항상 극값을 가지는 것은 아니다.

05 함수의 그래프 [p.122~124]

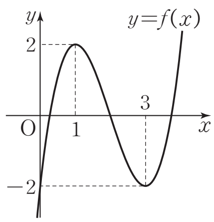
탐구 활동

1

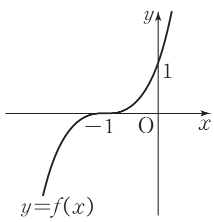
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

2 극댓값: 2, 극솟값: -2

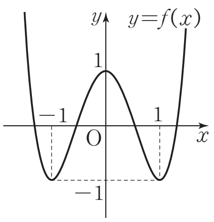
1 (1)



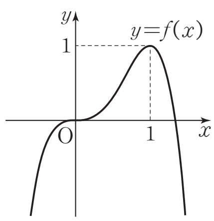
(2)



2 (1)



(2)



3 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0 (2) 최댓값: 3, 최솟값: -5

4 $a=3$

창의 up

(1) 상자의 부피를 $f(x)$ cm^3라고 하면

$f(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$ (단, $0<x<6$)

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

그런데 $0<x<6$이므로 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	128 (극대)	↘	0

따라서 $x=2$(cm)일 때, 상자의 부피가 최대가 된다.

(2) 상자의 부피의 최댓값은 128 cm^3이다.

06 방정식과 부등식에의 활용 [p.125~127]

탐구 활동

1 $x^3-3x-1=0$ **2** 3개

1 (1) 1 (2) 2

2 $-4<a<4$

3 (1) $f(x)=x^3-(3x^2-5)=x^3-3x^2+5$라고 하면

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗

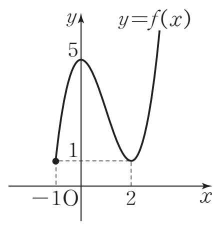
주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이

$f(-1)=f(2)=1$이므로

$x\geq-1$인 모든 x에 대하여

$f(x)=x^3-(3x^2-5)>0$

$x^3>3x^2-5$



(2) $f(x)=3x^4-4x^3+1$이라고 하면

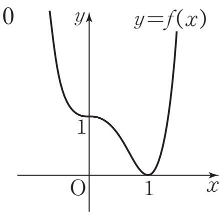
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(1)=0$이므로 모든 x에 대하여

$f(x)=3x^4-4x^3+1\geq0$

$3x^4-4x^3+1\geq0$



4 $k\leq-2$

07 속도와 가속도 [p.128~130]

탐구 활동

1 $(10-5h)$ m/s **2** 10 m/s

1 속도: -2, 가속도: -6

2 (1) 속도: 23.4, 가속도: -1.3

(2) 속도 $v=26-1.3t=0$에서 $t=20$(초)

이때의 움직인 거리 x는

$x=26\times20-0.65\times20^2=260$

| 단원 과제 |

속도 $v=200(\text{km/h})=\dfrac{200\times1000}{60\times60}=\dfrac{2000}{36}$(m/s)이므로

$\dfrac{dD}{dt}=v=\dfrac{20}{9}t=\dfrac{2000}{36}$에서 $t=25$(초)

따라서 비행기가 활주로에서 이동한 거리 D는

$D=\dfrac{10}{9}\times25^2=\dfrac{6250}{9}$(m)

중단원 기초 [p.131]

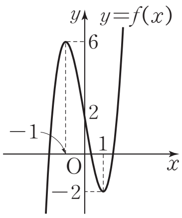
1 (1) $y=-x+4$ (2) $y=3x-4$

2 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

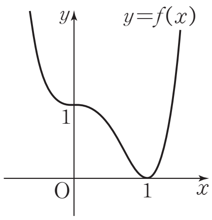
3 (1) 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 증가, 구간 $(2,\ \infty)$에서 감소
(2) 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가

4 (1) 극댓값: 5, 극솟값: -3
(2) 극댓값: 2, 극솟값: 1

5 (1)



(2)



6 (1) 2 (2) 1

7 속도: 8, 가속도: 10

중단원 기본 [p.132]

1 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{2}$

2 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)=-1$이고 구간 $(2,\ 3)$에서 $f'(x)=1$이다. 또 $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에서 존재하지 않는다.

3 $1\le a\le 4$

4 극댓값: $f(-1)=9$

5 32

6 $-2<k<2$

7 속도 $v=18-0.9t$이므로
$v=0$에서 $t=20$(초)
$x=18\times20-0.45\times20^2=180(\mathrm{m})$

중단원 실력 [p.133]

1 $a(x^2+2x+1)+(x^3+x+5-y)=0$
$x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $x=-1$
$x^3+x+5-y=0$에 $x=-1$을 대입하면 $y=3$
따라서 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$
$f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$라고 하면
$f'(-1)=3-2a+2a+1=4$
구하는 접선의 방정식은 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$을 지나고, 기울기가 4이므로
$y-3=4(x+1)$, $y=4x+7$

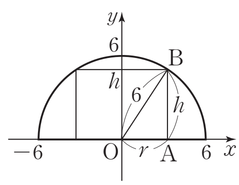
2 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=2a+h$
$f'(a+\theta h)=2a+2\theta h$
$2a+h=2a+2\theta h$, $\theta=\dfrac{1}{2}$

3 $f'(x)=3x^2+2ax+b=3x(x-2)=3x^2-6x$이므로
$a=-3$, $b=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(극대)	↘	(극소)	↗

$x=2$에서 극소이므로
$f(2)=8-12+c=6$, $c=10$
따라서 극댓값은 $f(0)=c=10$

4



삼각형 OAB에서 $36=r^2+h^2$
직원기둥의 부피를 V라고 하면
$V=\pi r^2h=\pi(36-h^2)h=-\pi h^3+36\pi h$
(단, $0<h<6$)
$V'=-3\pi h^2+36\pi$
$V'=0$에서 $h=2\sqrt{3}$ 또는 $h=-2\sqrt{3}$
$0<h<6$이므로 $h=2\sqrt{3}$
$h=2\sqrt{3}$일 때 V는 극대이면서 최대이다.
$V=-\pi\times24\sqrt{3}+36\pi\times2\sqrt{3}=48\sqrt{3}\pi$

5 점 $(0,\ a)$에서 곡선에 그은 접선의 접점을 $(\alpha,\ \beta)$라고 하면 $y'=3x^2+6x+2$이므로 접선의 기울기는 $3\alpha^2+6\alpha+2$이다. 따라서 접선의 방정식은

$y-\beta=(3\alpha^2+6\alpha+2)(x-\alpha)$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a-\beta=(3\alpha^2+6\alpha+2)(-\alpha)$

$\beta=\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha$를 대입하여 정리하면

$2\alpha^3+3\alpha^2=-a$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로

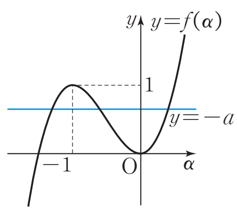
$f(\alpha)=2\alpha^3+3\alpha^2$이라고 하면

$f'(\alpha)=6\alpha^2+6\alpha=0,\ \alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(\alpha)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

두 함수 $f(\alpha)=2\alpha^3+3\alpha^2$과 $y=-a$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<-a<1,\ -1<a<0$



6 ㄱ. $t=a$일 때 점 P의 속도는 $x'(a)=0$

ㄴ. $t=b$일 때 점 P가 움직이는 방향은 변하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

수행 과제 [p. 134]

1 ㉠ 0개, ㉡ 2개, ㉢ 1개

2 ㉠ 극값이 없다.
㉡ 극댓값: 1개, 극솟값: 1개
㉢ 극값이 없다.

3 각각의 ( ) 안에 차례로 ㉡, ㉢, ㉠

대/단/원 평가 문제 [p. 136~137]

1 ③	**2** ④	**3** ①	**4** ⑤	**5** ⑤
6 ③	**7** ④	**8** ④	**9** ④	**10** ③
11 ④	**12** ④	**13** $f(x)=3x^2+2x+4$		**14** 2
15 풀이 참조		**16** 풀이 참조		

7 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

$(a<c<b$ 또는 $b<c<a)$인 c가 존재한다.

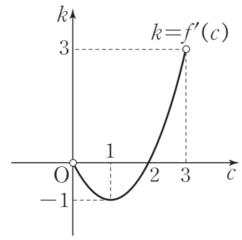
$0\le a<c<b\le 3$ 또는 $0\le b<c<a\le 3$이므로

$0<c<3$

$f'(x)=x^2-2x$에서

$f'(c)=(c-1)^2-1$

따라서 $k=f'(c)$라고 하면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$0<c<3$이므로

$-1\le k<3$

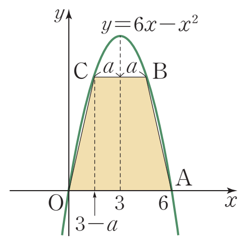
15 $6x-x^2=0$에서 $x(x-6)=0$

이므로 $x=0$ 또는 $x=6$

$\mathrm{A}(6,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(3-a,\ -a^2+9)$

$(0<a<3)$로 놓고, 사다리꼴의 넓이를 $S(a)$라고 하면



$S(a)=\dfrac{1}{2}(2a+6)(-a^2+9)$

$\quad=-a^3-3a^2+9a+27$

$S'(a)=-3a^2-6a+9$

$\quad=-3(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1\ (0<a<3)$

$a=1$에서 극대이면서 최댓값을 가진다.

따라서 넓이의 최댓값은 32이다.

16 $f(x)=x^3-3x^2-a$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-a$	$\searrow$	$-a-4$	$\nearrow$

$x>2$인 모든 실수에서 (최솟값)>0이므로

$f(2)=-a-4\ge 0$

따라서 $a\le -4$

Ⅳ 다항함수의 적분법

|준|비|학|습| [p. 143]

1 (1) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (2) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 (1) $y'=0$ (2) $y'=2$
(3) $y'=2x+5$ (4) $y'=3x^2-2x$

3 속도: 18, 가속도: 14

1 부정적분과 정적분

01 부정적분 [p. 145~149]

탐구 활동

1 $f_1(x)=-4.9x^2+1 \Rightarrow f_1'(x)=-9.8x$
$f_2(x)=-4.9x^2+2 \Rightarrow f_2'(x)=-9.8x$
$f_3(x)=-4.9x^2+3 \Rightarrow f_3'(x)=-9.8x$

2 $y=-4.9x^2+1$, $y=-4.9x^2+2$,
$y=-4.9x^2+3$, $\cdots$

3 도함수가 $-9.8x$인 함수는 무수히 많다.

1 (1) $3x+C$ (2) x^3+C (3) x^4+C
(단, C는 적분상수)

2 (1) $f(x)=2x+3$ (2) $f(x)=3x^2+6x-2$

탐구 활동

1 x^2, x^3, x^n, $\dfrac{1}{5}x^5$

2 x^n의 부정적분은 $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$이다. 즉, 원래 함수의 (지수+1)이 부정적분의 계수의 분모와 부정적분의 지수가 된다.

3 (1) $\dfrac{1}{5}x^5+C$ (2) $\dfrac{1}{8}x^8+C$ (3) $\dfrac{1}{11}x^{11}+C$
(단, C는 적분상수)

4 (1) $\displaystyle\int x^m\cdot x^n dx=\int x^{m+n}dx=\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}+C$
(2) $\displaystyle\int (x^m)^n dx=\int x^{mn}dx=\frac{1}{mn+1}x^{mn+1}+C$
(단, C는 적분상수)

5 (1) x^3+x^2-x+C (2) $2x^3-x^2-x+C$
(3) $\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-15x+C$ (4) $\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$
(단, C는 적분상수)

6 (1) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2x+1$
(2) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{8}{3}$

02 구분구적법 [p. 150~153]

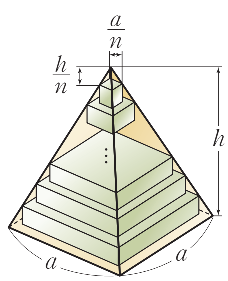
탐구 활동

1 3, 24, 15, 54 **2** 3, 6, 15, 13.5, 12, 7.5

3 점점 작아진다.

1 (1) $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n}$
(2) $0^3, \left(\dfrac{1}{n}\right)^3, \left(\dfrac{2}{n}\right)^3, \cdots, \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^3, \left(\dfrac{n}{n}\right)^3$
(3) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{n}\right)^3=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$
(4) $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}$

2 오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 높이를 n등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 정사각뿔을 자르면 각 단면의 한 변의 길이는 위에서부터 차례로 다음과 같다.



$\dfrac{a}{n}, \dfrac{2a}{n}, \cdots, \dfrac{(n-1)a}{n}$

각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\dfrac{h}{n}$인 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합 V_n은 $V_n=\dfrac{a^2h}{6}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)$

따라서 구하는 도형의 부피 V는 $V=\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{a^2h}{3}$

03 정적분 [p.154~161]

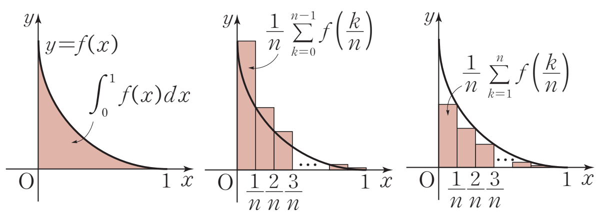
탐구 활동

1 $\dfrac{2}{n}$ **2** $\left(\dfrac{2k}{n}\right)^2\dfrac{2}{n}$

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

1 (1) 6 (2) 9 (3) $-\dfrac{8}{3}$ (4) $-\dfrac{1}{4}$

사고력 기르기



$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

탐구 활동

1 $S(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$, $S'(x)=x+1$

2 $S(x)=\displaystyle\int_0^x (t+1)dt$

3 $S'(x)=f(x)$

2 (1) $3x^2-8x+9$
(2) $(3x-2)(x+8)$

3 (1) 2 (2) -15 (3) 30 (4) 2

4 (1) -4 (2) 4 (3) -6

5 $f(x)=8x-5$, $a=1$

6 $f(x)=-x^2+1$이므로

$g(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}(-t^2+1)dt=-\dfrac{1}{3}x^3+x+\dfrac{2}{3}$

$g'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt=f(x)=-x^2+1$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	0	↗	$\dfrac{4}{3}$	↘	0

따라서 $g(x)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$

사고력 기르기

$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$로 놓으면 $F(0)=0$이므로 $F(x)$의 그래프는 원점을 지나는 B 또는 C이다.

한편 $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=f(x)$이므로 $F'(0)=f(0)$

(i) $F(x)$의 그래프가 B일 때 $F'(0)>0$
즉, $f(0)>0$이므로 $f(x)$의 그래프는 A이다.

(ii) $F(x)$의 그래프가 C일 때 $F'(0)<0$
즉, $f(0)<0$인 그래프는 없다.

따라서 A는 $y=f(x)$의 그래프, B는 $y=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$의 그래프, C는 $y=f'(x)$의 그래프이다.

04 정적분의 계산 [p.162~166]

탐구 활동

1 $2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2f(x)dx=\dfrac{1}{2}$

2 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx$
$=-\dfrac{3}{4}$

3 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=4$

1 (1) $\dfrac{23}{6}$ (2) 3
(3) $-\dfrac{32}{3}$ (4) $-\dfrac{17}{3}$

2 (1) 4 (2) -12

3 (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) $\dfrac{19}{2}$

4 (1) $\dfrac{1}{5}$ (2) $\dfrac{7}{3}$

| 단원 과제 |

(1) 피타고라스 정리에 의하여 위에서부터 k번째 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하면

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{k}{n}r\right)^2}=r\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

(2) k번째 원기둥의 부피는

$$\pi r^2\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{r}{n}=\frac{r^3}{n}\pi\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

(3) 구하는 반구의 부피는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^3}{n}\pi\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\pi r^3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\pi r^3\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}\pi r^3$$

중단원 기초 [p. 167]

1 (1) $f(x)=6x+7$ (2) $f(x)=-x^2+2$

2 (1) $\frac{1}{6}x^6+C$ (2) $2x^2+5x+C$

(3) x^3-x^2+5x+C (4) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

3 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 4

4 (1) $2x^3+4$ (2) $(x-1)^3$

5 (1) $\frac{43}{12}$ (2) $\frac{11}{4}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) 20

중단원 기본 [p. 168]

1 $f(x)=x^2+x+1$

2 $\left(\frac{k}{n}\right)^3$

3 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_2^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_2^x=F(x)-F(2)$$

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$=F'(2)=f(2)=9$$

4 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 4 (3) 18 (4) 4

5 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}^3=\frac{3}{4}$

중단원 실력 [p. 169]

1 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

(단, C는 적분상수)

$F(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+1+C$

$F(0)=3$이므로 $C=2$

$F(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+3$

따라서 $F(x)$에 $x=2$를 대입하면

$F(2)=2^{10}+2^9+2^8+\cdots+2^2+2+3=2049$

2 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$ $(a>0)$이므로

$f(x)=\int(ax^2-a)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax+C$

(단, C는 적분상수)

극댓값이 6이므로

$f(-1)=\frac{2}{3}a+C=6$ …… ①

극솟값이 -2이므로

$f(1)=-\frac{2}{3}a+C=-2$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=6$, $C=2$

따라서 $f(x)=2x^3-6x+2$

3 $f'(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x<1)\\ -x+C_2 & (x>1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이므로

$3=1+C_1=-1+C_2$, $C_1=2$, $C_2=4$

$f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le1)\\ -x+4 & (x\ge1)\end{cases}$

따라서

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1(x+2)dx+\int_1^3(-x+4)dx=\frac{13}{2}$$

4 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, $\beta(\alpha<\beta)$이므로

$ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$

따라서

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx\\&=\int_\alpha^\beta a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx\\&=\left[a\left\{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right\}\right]_\alpha^\beta\\&=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}\end{aligned}$$

5 $$\begin{aligned}\int_1^n f(x)dx&=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx\\&\quad+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_1^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

2 정적분의 활용

01 넓이 [p.171~175]

탐구 활동

1 $S_1=4=\int_0^2 2x\,dx$ **2** $S_2=1=-\int_{-1}^0 2x\,dx$

1 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{37}{12}$

2 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{11}{4}$

탐구 활동

1 산책로의 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이에서 곡선 $y=g(x)$와 x축 사이의 넓이를 빼서 구한다.

2 $S=\int_0^{100} f(x)dx-\int_0^{100} g(x)dx$

3 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{125}{6}$

4 (1) $\frac{64}{3}$ (2) $\frac{27}{4}$

5 (1) 2 (2) $\frac{9}{2}$

| 단원 과제 |

$\int_0^1\{x-L(x)\}dx=0.21$이므로

우리나라의 지니 계수는 $\dfrac{0.21}{\frac{1}{2}}\times100=42$

02 속도와 거리 [p.176~178]

탐구 활동

1 $v(t)=30-10t(\text{m/s})$

2 $\int_0^3 v(t)dt=45(\text{m})$

$t=3$일 때의 자동차의 위치: 45 m

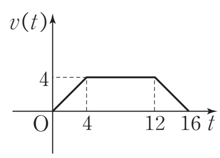
서로 같다.

1 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1

2 20초, 600 m

사고력 기르기

엘리베이터의 속도를 v라고 하면



$$v(t)=\begin{cases}t & (0\le t\le 4)\\4 & (4\le t\le 12)\\16-t & (12\le t\le 16)\end{cases}$$

따라서 엘리베이터가 움직인 거리 s는

$s=\int_0^4 t\,dt+\int_4^{12}4dt+\int_{12}^{16}(16-t)dt=48(\text{m})$

중단원 기초 [p.179]

1 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

2 $\frac{31}{6}$

3 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

4 9

5 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) 2

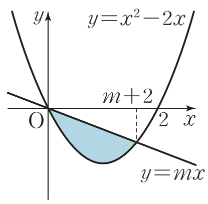
중단원 기본

[p.180]

1 $a=4$

2 (1) 9 (2) $\frac{4}{3}$

3 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면



$x=0$ 또는 $x=m+2$

$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\frac{4}{3}$이므로

$\int_0^{m+2}(mx-x^2+2x)dx=\frac{2}{3}$

$(m+2)^3=4$

4 $\frac{1}{6}$

5 ㄱ. $t=1$에서의 점 P의 위치는 $\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

중단원 실력

[p.181]

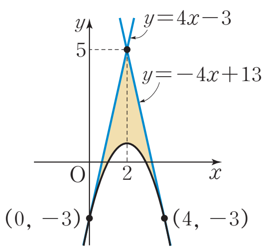
1 $S'(t)=\frac{d}{dt}\int_2^t f(x)dx=f(t)$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h}=S'(2)=f(2)=4$

2 $(0,\ -3)$에서의 접선의 방정식은 $y=4x-3$

$(4,\ -3)$에서의 접선의 방정식은 $y=-4x+13$

따라서 두 접선의 교점은 $(2,\ 5)$



구하는 도형은 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로

구하는 도형의 넓이는

$2\int_0^2\{(4x-3)-(-x^2+4x-3)\}dx=\frac{16}{3}$

3 곡선 $y=-x^2+1$ 위의 점 $(a,\ -a^2+1)$에서의 접선의 방정식은 $y=-2ax+a^2+1$

구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^1\{(-2ax+a^2+1)-(-x^2+1)\}dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx$$
$$=a^2-a+\frac{1}{3}$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 S의 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다.

4 $v(t)=25-4t=0$에서 $t=\frac{25}{4}$이므로 $\frac{25}{4}$초 후 열차가 멈춘다.

구간 $\left[0,\ \frac{25}{4}\right]$에서 $v(t)\geq0$이고, 이 구간 동안 열차가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{25}{4}}v(t)dt=\int_0^{\frac{25}{4}}(25-4t)dt=\frac{625}{8}$(m)

따라서 열차가 장애물과 부딪히지 않기 위한 x값의 범위는 $x>\frac{625}{8}$

수행 과제

[p.182]

1 $50\Delta x$ m^2

2 $50x\Delta x$ t

3 10000

대/단/원 평가 문제

[p.184~185]

1 ②	2 ①	3 ④	4 ⑤	5 ②
6 ③	7 ③	8 ④	9 ⑤	10 ④
11 ②	12 ②	13 $f(x)=-2x^4+2$		14 $\frac{1}{4}$
15 풀이 참조		16 풀이 참조		

5 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$에서

$1+\frac{2k}{n} \longrightarrow x$라고 하면 $\frac{2}{n} \longrightarrow dx$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 x^3dx$$

$a=3$

9 $y=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$이므로

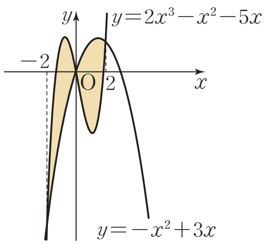
곡선 $y=x^2-4x+k$는 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\int_0^2(x^2-4x+k)dx=0$, $k=\frac{8}{3}$

10 $2x^3-x^2-5x=-x^2+3x$

에서 $x=0$ 또는 $x=\pm2$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{0}\{(2x^3-x^2-5x)-(-x^2+3x)\}dx+\int_0^2\{(-x^2+3x)-(2x^3-x^2-5x)\}dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{-2}^{0}+\left[4x^2-\frac{x^4}{2}\right]_0^2$$
$$=8+8=16$$

13 접선의 기울기가 x^3에 비례하므로

$f'(x)=ax^3$ (a는 상수)

$f(x)=\frac{1}{4}ax^4+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)$가 점 $(0, 2)$와 $(1, 0)$을 지나므로

$f(0)=C=2$

$f(1)=\frac{1}{4}a+C=0$

따라서 $a=-8$, $C=2$이고 $f(x)=-2x^4+2$

14 $a_n=\int_0^n 3x^2dx=n^3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$$

15 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은 $y=3x-1$이고, 곡선 $y=x^3+1$과 직선 $y=3x-1$은 $x=1$, $x=-2$에서 교점을 가진다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(x^3+1)-(3x-1)\}dx=\frac{27}{4}$$

16 (1) $v(t)=0$에서 $t=2$

따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 것은 2초 후이고, 이때 점 P의 좌표는

$10+\int_0^2(8-4t)dt=10+\left[8t-2t^2\right]_0^2=18$에서 $\mathrm{P}(18)$

(2) t초 후의 점 P의 위치를 $s(t)$라고 하면

$s(t)=10+\int_0^t(8-4t)dt=10+8t-2t^2$

따라서 원점에 올 때까지 걸리는 시간은

$10+8t-2t^2=0$, $t^2-4t-5=0$

$(t-5)(t+1)=0$에서

$t\geq0$이므로 $t=5$

이때 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|8-4t|dt=\int_0^2(8-4t)dt+\int_2^5(4t-8)dt$$
$$=26$$

용어

기호

사진 자료 출처

뉴스뱅크 이미지 • • 128쪽

셔터스톡 • • 12쪽, 16쪽, 21쪽, 28쪽, 40쪽, 48쪽, 75쪽, 85쪽, 86쪽, 91쪽, 115쪽, 118쪽, 124쪽, 134쪽, 138쪽, 139쪽, 142쪽, 144쪽, 153쪽, 173쪽, 176쪽, 177쪽, 178쪽, 187쪽

아이스톡포토 • • 24쪽　유로크레온 • • 12쪽　이미지클릭 • • 88쪽

토픽이미지 • • 10쪽, 21쪽, 50쪽, 66쪽, 74쪽, 88쪽, 90쪽, 106쪽, 107쪽, 110쪽, 138쪽, 139쪽, 178쪽, 182쪽

기타 • • 미국항공우주국(http://www.nasa.gov) – 144쪽, 166쪽

인용 자료 출처

21쪽, 이광연, 이광연의 수학 블로그, 동아시아, 2011, pp.205~211
21쪽, EBS(http://www.ebs.co.kr)
28쪽, 한국과학창의재단 사이언스올(http://www.scienceall.com)
33쪽, Roger B. Nelsen, Proofs without words, MAA, 1993, pp.118
42쪽, 이광연, 이광연의 오늘의 수학, 동아시아, 2011, pp.45~52
46쪽, 이광연, 이광연의 오늘의 수학, 동아시아, 2011, pp.45~52
47쪽, 한국공간디자인학회(http://www.kisd.or.kr)
50쪽, 기상청(http://www.kma.go.kr)
66쪽, 국세청(http://www.nts.go.kr)
71쪽, 국세청(http://www.nts.go.kr)
80쪽, 최행진, 셈틀에서 태어난 수치해석학(완전판), 교우사, 2008, pp.168~171
84쪽, 미치오 가쿠(박병철 역), 평행우주, 김영사, 2006, pp.56~62
88쪽, 한국과학창의재단 사이언스올(http://www.scienceall.com)
89쪽, 조선일보(http://news.chosun.com)
106쪽, 스카이뉴스(http://skynews.co.kr)
115쪽, 국립해양조사원(http://www.khoa.go.kr)
118쪽, 안철수연구소(http://www.ahnlab.com)
128쪽, 한국물리학회(http://www.kps.or.kr)
130쪽, George B. Thomas Jr. 외 2인, Thomas' Calculus 11th Edition, Pearson, 2005, pp.215
138쪽, 박경미, 수학 콘서트, 동아시아, 2006, pp.262~263
138쪽, ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA(http://global.britannica.com)
139쪽, 두산백과사전 두피디아(http://doopedia.co.kr)
139쪽, 클레이 수학 연구소(http://www.claymath.org)
144쪽, 동아일보(http://www.donga.com)
144쪽, 미국항공우주국(http://www.nasa.gov)
144쪽, 한국항공우주연구원(http://www.karischool.re.kr)
145쪽, 한국과학창의재단 사이언스올(http://www.scienceall.com)
170쪽, 미국중앙정보국(http://www.cia.gov)
175쪽, 통계청(http://kostat.go.kr)
176쪽, 교통사고공학연구소(http://taei.re.kr)
182쪽, 한국대댐회(http://www.kncold.or.kr)
186쪽, 아시아경제(http://www.asiae.co.kr)
186쪽, 조선일보(http://news.chosun.com)
187쪽, 이광연, 이광연의 수학 블로그, 동아시아, 2011, pp.105~113

집필진

* 신항균 서울교육대학교 총장
이계세 경기도학생교육원 교육연구사
박상의 장충고등학교 교사
이광연 한서대학교 교수
김정화 서울고등학교 교사
서원호 청원고등학교 교감
박세원 신경대학교 교수
박문환 인천인제고등학교 교사
전제동 창원중앙고등학교 교사
신범영 청담중학교 교감
윤정호 대구과학고등학교 교사
이동흔 숭문고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

인천광역시교육청 인정도서심의회 위원

* 박규홍 서원대학교
정옥경 인천신현고등학교
김동수 신명여자고등학교
정미라 제물포고등학교
최중근 인천초은고등학교
이진 세일고등학교
양재원 인천영선고등학교
양혜순 인천부흥고등학교
권태룡 동인천고등학교
김현옥 신송고등학교
민선애 인천공항고등학교
권봉희 인천송천고등학교
서순옥 인천예술고등학교
김윤수 검단고등학교
안유진 인천진산과학고등학교
유영신 인천상정고등학교
배수아 인천산곡고등학교
박제남 인하대학교
오흥준 초당대학교
배재형 경희대학교
김성기 계산고등학교
전경환 인하대학교사범대학 부속고등학교
서동희 인천고잔고등학교
조준호 인명여자고등학교
김미경 연송고등학교
이재성 인천공항고등학교
배혜정 옥련여자고등학교
임병태 영종국제물류고등학교
이종현 작전여자고등학교
강신석 인천과학고등학교
김희경 도림고등학교
윤세정 부광고등학교
류주현 부평여자고등학교
김윤정 인천국제고등학교
김진영 인천진산과학고등학교
장은하 부개여자고등학교
박진상 인천외국어고등학교
박영경 세일고등학교
이재정 인천남동고등학교
조성현 인천원당고등학교
김복수 송도고등학교
정문자 수원대학교
이종성 인하대학교
김병학 경희대학교
김대흥 신송고등학교
허석 부개고등학교
박희성 인천영종고등학교
성미애 부개여자고등학교
전효진 가림고등학교
윤효진 인천고등학교
오경민 학익고등학교
김종오 광성고등학교
이선희 문일여자고등학교
유경민 연수여자고등학교
우연희 서운고등학교
이혜연 백석고등학교
박은희 연수고등학교
조영식 인천부흥고등학교
신은주 인일여자고등학교
김성래 광성고등학교
함유선 인천여자고등학교
박종호 안남고등학교
문정연 연수여자고등학교
임승희 인제고등학교
이대성 부광고등학교
이재원 금오공과대학교
조규근 명지대학교
이재혁 이화여자대학교
김경선 인천가정고등학교
윤기운 인천여자고등학교
한경호 학익여자고등학교
최항철 인천국제고등학교
고명호 인천국제고등학교
차요섭 인천대건고등학교
김현희 인일여자고등학교
신선희 인천청라고등학교
고아라 부평고등학교
박숭열 인천예일고등학교
김성식 부광여자고등학교
최미희 작전고등학교
김기선 인천광성중학교
홍지연 인천신현고등학교
고현숙 학익여자고등학교
문서영 인천청라고등학교
최윤호 연수고등학교
안현태 강화고등학교
김장회 인천예일고등학교
이주영 인천송천고등학교
고석구 건국대학교
류희수 경인교육대학교
오종철 군산대학교
이동환 부산교육대학교
박용회 계산고등학교
고일석 계양고등학교
김혜경 검단고등학교

* 표시는 심의회 위원장임

인천광역시교육청 인정도서 감수 위원

* 김태순 목원대학교
김선아 조선대학교
박달원 공주대학교
송민호 숙명여자대학교
이영래 대성고등학교
조경희 경기과학고등학교
구대환 충남여자고등학교
김재남 대전여자상업고등학교
박문환 춘천교육대학교
안영준 조선대학교
이재갑 창원과학고등학교
조계성 하나고등학교
김광열 광주서석고등학교
김향숙 인제대학교
박복현 인헌고등학교
윤민지 성남여자고등학교
장동만 상일여자고등학교
조중식 대원여자고등학교
김대현 마산제일여자고등학교
노미라 증평정보고등학교
서혜영 전주여자고등학교
이봉주 경북대학교
전한우 서문여자중학교

* 표시는 감수 위원 책임자임

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛, 이유희
표지 디자인 김의수
본문 디자인 박현신
삽화 김성남
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2013년 8월 30일 인정 승인을 하였음.

고등학교 미적분 I

2014. 3. 1. 초판 발행　　2015. 3. 1. 2쇄 발행　　정가　　원

지은이: 신항균 외 11인
발행인: (주)지학사　서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인: (주)벽호　경기도 파주시 한빛로 43

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 따라 **사단법인 한국복제전송저작권협회**(전화 02-2608-2800, 누리집 주소 www.korra.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사　콘텐츠본부 수학팀　전화 02-330-5440　전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사　영업본부 영업관리팀　전화 02-330-5302　전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서　경기도　파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소　www.ktbook.com　전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04014-7 53410

고등학교 미적분 I

53410
9 788905 040147
ISBN 978-89-05-04014-7